SÉRIE A, N° 3621
N° D'ORDRE :
4493

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean VALAT

PREMIÈRE THÈSE

Sur la stabilité, les solutions périodiques et la résolution de certaines catégories d'équations et systèmes d'équations différentielles couplées non linéaires apparaissant dans les oscillations bétatroniques

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 15 Décembre 1960 devant la Commission d'examen :

MM. PERRIN — Président

GRIVET, FORTET — Examinateurs

SÉRIE A, N° 3621
N° D'ORDRE :
4493

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean VALAT

PREMIÈRE THÈSE

Sur la stabilité, les solutions périodiques et la résolution de certaines catégories d'équations et systèmes d'équations différentielles couplées non linéaires apparaissant dans les oscillations bétatroniques

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 15 Décembre 1960 devant la Commission d'examen :

MM. PERRIN — Président

GRIVET, FORTET — Examinateurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... J. PERES

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et histol. comparées
PERES	T	Mécanique des fluides et applications
BARRABE	T	Géologie struct. et Géologie appliquée
BOURCART	T	Géogr. physique et Géol. dynamique
PLANTEFOL	T	Botanique
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie végétale
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité
MONNIER	T	Physiologie générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie Générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
P. DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
WURMSER	T	Biologie physico-chimique
RIVIERE	T	Géologie (SPCN) Orsay
GAUTHERET	T	Biol. Végétale (PCB)
LUCAS	T	Recherches Physiques
A. THOMAS	T	Biol. cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
M. MORAND	T	Enseignement de Physique
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Génétique
GRIVET	T	Radioélectricité
PONCIN	T	Mécanique générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécul.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffract. électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories physiques
PRUVOST	T	Géologie
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie
J.P. MATHIEU	T	Physique (Orsay)
COUTEAUX	T	Biol. animale (PCB)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théor. des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biol. végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des prob. et physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calc. diff. et Intégr.
CHOUARD	T	Physiologie végétale
MALAVARD	T	Aviation
BRELOT	T	Calcul différentiel
NORMANT	T	Synthèse organique
BENARD	T	Chimie minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques mathém.
GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.)
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale
MARECHAL	T	Optique théorique et appliquée
KIRRMANN	T	Théories chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiol. générale
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Mathématiques générales
DEVILLERS	T	Anatomie et Histol. comparées
EHRESMANN	T	Topologie algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géogr. physique et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (MGP)
PISOT	T	Techniques mathem. de la Physique
ROCH E.	T	Géologie
SCHATZMANN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET		Génétique
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Relativité
DIXMIER	T	Mathématiques (MPC)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechn. générale
BRUSSET		Chimie minérale
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies
Mme CHAIX		Chimie biologique
Mme HUREL-PY		Biol. vég. (P.C.B.)
PIAUX		Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécanique exper. des Fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathématiques
Mme LELONG	T	Mathem. (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique (Orsay)
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique
LAMOTTE		Zoologie (E.N.S.)
MICHEL André	T	Chimie (S.P.C.N.)
OLMER	T	Energétique Gle
ROUAULT	T	Physique générale
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER		Physiologie comparée
CAMUS		Physiol. Vég. (3e Cycle)
CASTAING		Physique générale
CURIEN		Minéralogie et cristallographie
MOYSE	T	Physiol. Vég. (Orsay)
PANNETIER		Chimie (S.P.C.N.)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN		Chimie théorique
TEILLAC		Physique nucléaire et radioactivité
TONNELAT		Biol. physico-chimique
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART		Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (SPCN) Orsay
FREYMANN	T	Physique générale
GUINOCHET	T	Biol. Vég. (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie (P.C.B.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique
CHAPELLE	T	Physique (M.P.C.) (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques (MGP)
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologique
ALLARD		Chimie Physique
BERTHELOT		Physique Nucléaire et Radioactivité
BRICARD		Météorologie et Physique de l'Atmosphère
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiol.
FRIEDEL		Physique des Solides
M. JULIA		Etude des molécules organiques complexes
LENDER		Biol. Animale (S.P.C.N.) (Orsay)
MAGAT		Physico-chimie des Rayonnements
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiologie animale
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiologie B.M.P.V.
GUERIN	T	Chimie M.P.C.
CHATELET M		Chimie (S.P.C.N.)
JEAN		Physique Nucléaire et Radioactivité
MATTLER		Physique (S.P.C.N.)
MICHEL (Louis)		Physique théorique des hautes énergies
RUMPF		Chimie (P.C.B.)
BERGERARD		Zoologie (Orsay)
BERTEIN		Electronique
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments
Mme COUTURE		Physique (P.C.B.)
ELLENBERGER		Géologie Structurale et Géologie appliquée
FRANC		Biologie animale
SCHNELL		Botanique tropicale
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie Biologique (Orsay)
BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.)
BEAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.)
BLAMONT		Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Biologie Végétale S.P.C.N. (Orsay)
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FREON		Chimie (P.C.B.)
HELLER		Physiologie végétale
TORTRAT		Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN		Physique (M.P.C.)
DAUDEL		Mécanique Ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la Physique Nucléaire
Mlle FOURCROY		Biologie Végétale (S.P.C.N.)

Secrétaire général ..... R. POULLAIN

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

A mes parents

REMERCIEMENTS

Commencé au Laboratoire de Radioélectricité de la Sorbonne, le présent travail a été terminé au sein du Commissariat à l'Energie Atomique.

Qu'il me soit permis d'exprimer à Monsieur le Haut-Commissaire, Francis Perrin, Membre de l'Institut, ma respectueuse gratitude et ma profonde reconnaissance pour la bienveillance et la sollicitude qu'il n'a cessé de me témoigner.

Ce travail a été effectué sous la haute direction de Monsieur le Professeur Grivet, qui par ses conseils clairvoyants m'a permis d'orienter cette étude et de mener à bien le travail qu'il m'avait proposé. Qu'il trouve ici l'expression de ma vive reconnaissance.

Monsieur le Professeur Fortet a bien voulu accepter de me guider dans l'étude des systèmes couplés et m'encourager dans cette voie. C'est pour moi un bien agréable devoir de lui présenter mes vifs remerciements.

Monsieur Surdin, Chef du Département d'Electronique, et Monsieur Weill, Chef de la Section d'Electronique des Réacteurs, m'ont permis de mener à bien ce travail dans le cadre de leur service et y ont toujours porté un intérêt soutenu. C'est pour moi un agréable devoir de les remercier bien vivement.

Messieurs les Professeurs Bertein et Blaquière m'ont souvent soutenu par leurs encouragements et leurs conseils, ainsi que Monsieur le Professeur Bernard qui m'a particulièrement suivi et avec qui j'ai eu de nombreuses et fertiles discussions. A tous trois, j'ai le grand plaisir de présenter ici mes vifs remerciements.

Messieurs Braffort puis Caillet, Chefs du Laboratoire de Calcul Analogique, et mes camarades du Laboratoire, ont su m'entourer d'une atmosphère de compréhensive amitié, propice à la création. Qu'ils en soient tous sincèrement remerciés.

Madame Brasseur a dessiné avec beaucoup de talent bon nombre de calques et Madame Charravin et Mademoiselle Pellisson se sont acquittées en souriant des tâches ingrates de la dactylographie. Leur aide m'a été précieuse et je suis heureux de les en remercier.

INTRODUCTION

Le calcul des orbites dans un synchrotron à forte convergence conduit à l'étude des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients périodiques de période commune T, couplées non linéairement du genre :

$$\begin{cases} x'' + \overline{\overline{a}}.x = \overline{\overline{\varepsilon_1}}.\ x^2 + \overline{\overline{\varepsilon_2}}.y^2 \\ y'' + \overline{\overline{b}}.y = \overline{\overline{\delta}}.xy \end{cases}$$

où x et y représentent le déplacement d'une trajectoire comptée normalement à l'orbite d'équilibre. Les termes en $\overline{\overline{a}}$ et $\overline{\overline{b}}$ dépendent du gradient du champ. Les termes non linéaires ont diverses origines. Le lecteur consultera un ouvrage fondamental (1). Les coefficients périodiques sont pratiquement "crénelés", c'est-à-dire de la forme : $\overline{\overline{K}} = K_1 + K_2.\ \overline{\overline{S}}(T)$; K_1 et K_2 sont des constantes et $\overline{\overline{S}}(T)$ la fonction créneau + 1, - 1, + 1... etc de période T.

L'étude théorique, même approximative, d'un tel système (déjà simplifié) entraîne des difficultés considérables. Nous avons donc cherché à obtenir des renseignements, en particulier sur la stabilité paramétrique, au moyen d'une machine analogique. Il était intéressant de construire un simulateur électromécanique simple, dont l'idée est due à Monsieur A. Blaquière, en profitant de la forme crénelée des coefficients $\overline{\overline{K}} = K_1 + K_2.\ \overline{\overline{S}}(T)$. Mais avant d'envisager la construction d'un simulateur complet, il importait d'étudier le comportement d'un simulateur linéaire, limité à l'équation de Hill-Meissner :

$$y'' + [\lambda + \varkappa.\overline{\overline{S}}].\ y = 0$$

En effet, nous connaissons dans ce cas la forme de la solution générale (théorème de Floquet) et nous savons écrire les conditions rigoureuses de stabilité en fonction de λ, $\varkappa$, T (condition de Meissner-Strutt-Van der Pol).

La description et la mise au point de ce simulateur font donc l'objet d'une partie du présent travail. L'explication complète de son comportement nous a amenés à faire intervenir l'amortissement et la dissymétrie interne du montage, puis la dissymétrie de la fonction créneau, et nous a obligés à calculer de nombreux diagrammes universels nécessitant des calculs numériques considérables. Finalement, il nous est apparu qu'un tel simulateur ne pouvait s'utiliser que dans le cas d'une équation linéaire, tout au moins dans l'état actuel de la technique.

Au cours de ces recherches, nous avons été amenés à étudier le comportement du simulateur en tant que système asservi. Cette analyse nous a permis de donner une présentation originale du théorème de Floquet.

Une autre tentative, par le plan de phase de Poincaré, nous a permis de mettre en évidence la facilité d'étude des solutions périodiques de l'équation de Hill considérée. Nous avons pu généraliser cette méthode aux équations différentielles non linéaires, dont les coefficients varient suivant une loi crénelée.

Nous nous sommes finalement tournés vers l'étude des systèmes couplés non linéaires à coefficients constants. Après de nombreuses tentatives, nous avons été assez heureux pour trouver un certain nombre de méthodes menant à des solutions effectives exactes, tant pour les solutions "algébriques", que "non algébriques". Il est alors possible, dans une certaine mesure, de trouver les solutions périodiques d'un système couplé non linéairement par des coefficients périodiques crénelés, en généralisant la méthode indiquée pour une seule équation. Les méthodes utilisées sont d'ail-

leurs susceptibles de développements ultérieurs, mais nous avons arrêté à ce stade le présent travail.

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

(1) Michel-Yves BERNARD - La mécanique relativiste des particules chargées dans les champs électromagnétiques.
Tomes I - 1 ; I - 2 ; I - 3 du cours 3ème cycle "Théorie et Techniques des Accélérateurs de Particules" (INSTN - SACLAY).

CHAPITRE I

LE SIMULATEUR

I.1 - PRINCIPE ET DESCRIPTION DU SIMULATEUR.

I.1.1 - Principe.

Pour construire un simulateur électromécanique de l'équation de Hill :

$$y'' + [\lambda + \varkappa . \overline{\overline{S}}]. \; y = 0$$

où λ et $\varkappa$ sont des constantes et $\overline{\overline{S}}(t)$ la fonction créneau (voir figure 1) + 1, - 1, + 1, - 1 de période T, nous avons utilisé les oscillations de la boucle fermée d'un système asservi, constitué essentiellement par un galvanomètre, une cellule photoélectrique différentielle et des inverseurs (voir figure 2).

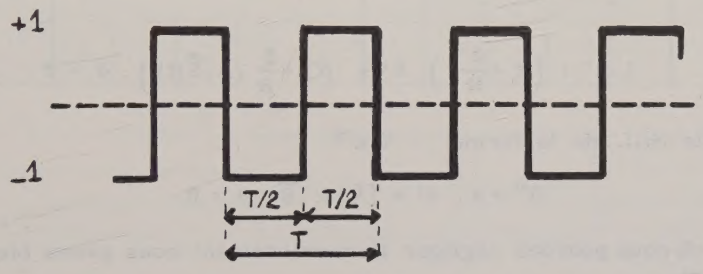


Fig. 1

L'équation du mouvement d'un galvanomètre peut se mettre en effet sous la forme :

$$I\vartheta'' + \left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right). \; \vartheta' + C.\vartheta = \frac{\Phi}{R} F$$

qui se déduit du système :

$$\begin{cases} I\vartheta'' + f.\vartheta' + C.\vartheta = N.S.H.i \\ Ri = E - N.S.H.\vartheta' \end{cases}$$

C étant la constante de torsion du galvanomètre, I le moment d'inertie du cadre, f le coefficient de résistance de l'air, Φ le flux traversant le cadre, R la résistance totale dans laquelle passe le courant du galvanomètre.

Si l'on s'arrange pour que E soit, proportionnel à ϑ, le coefficient de proportionnalité pouvant sauter périodiquement avec la période T de la valeur + A à la valeur - A, etc., c'est-à-dire pour que :

$$E = \pm A\,(t).\,\vartheta = A.\overline{\overline{S}}.\vartheta$$

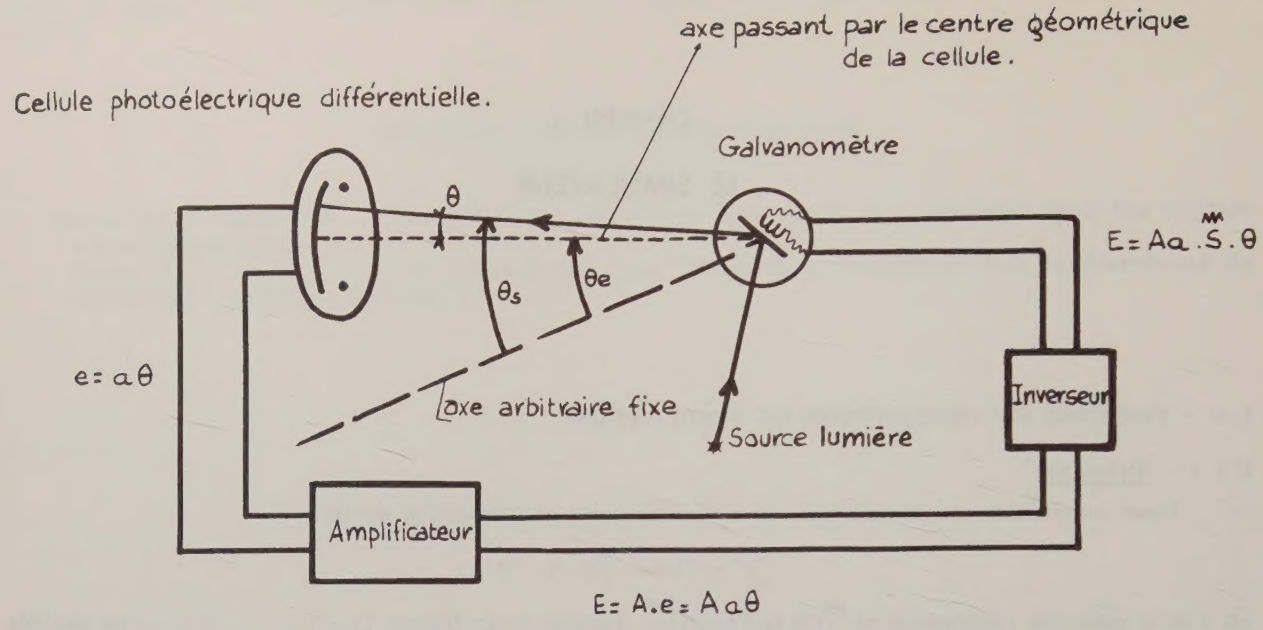


Fig. 2

nous obtenons

$$I.\vartheta'' + \left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right).\vartheta' + \left(C + \frac{\Phi}{R}.A.\tilde{\tilde{S}}(t)\right).\vartheta = 0$$

qui est une équation de Hill, de la forme

$$\vartheta'' + \alpha.\ \vartheta' + [\lambda + \varkappa.\tilde{\tilde{S}}].\ \vartheta = 0$$

Dans la mesure où nous pouvons négliger l'amortissement nous avons bien la forme cherchée.

La réponse $E = \tilde{\tilde{A}}(t).\ \vartheta$ s'obtient de la manière suivante :

Le galvanomètre envoie un spot d'intensité lumineuse constante sur la cathode d'une cellule photoélectrique différentielle, la réponse de cette cellule (fig. 3) est proportionnelle à la distance qui sépare le spot du centre de la cathode tant qu'on ne dépasse pas une certaine élongation. La tension de sortie de la cellule, prélevée comme il est indiqué sur le schéma de la figure 4 est donc proportionnelle à l'angle de rotation du galvanomètre. Cette tension est injectée dans ce galvanomètre après amplification par l'intermédiaire d'une lampe double électromètre. Deux relais polarisés à faible constante de temps de l'ordre de la milliseconde et commandés par un générateur de signaux rectangulaires à très basse fréquence, inversent périodiquement le branchement du galvanomètre.

I.1.2 - Description du montage.

Le montage est indiqué sur la figure 5. Nous utilisons un galvanomètre SEFRAM à deux miroirs : le miroir supérieur envoie le spot sur la cellule et le miroir inférieur forme un spot sur une échelle de lecture.

La source lumineuse est constituée par une lampe MAZDA à ruban de tungstène 10ᵛ, 15ᴬ, dont on forme l'image sur la cathode de la cellule, après une réflexion préalable sur le miroir supérieur du galvanomètre. Cette lampe est alimentée sous tension constante par une batterie d'accumulateurs.

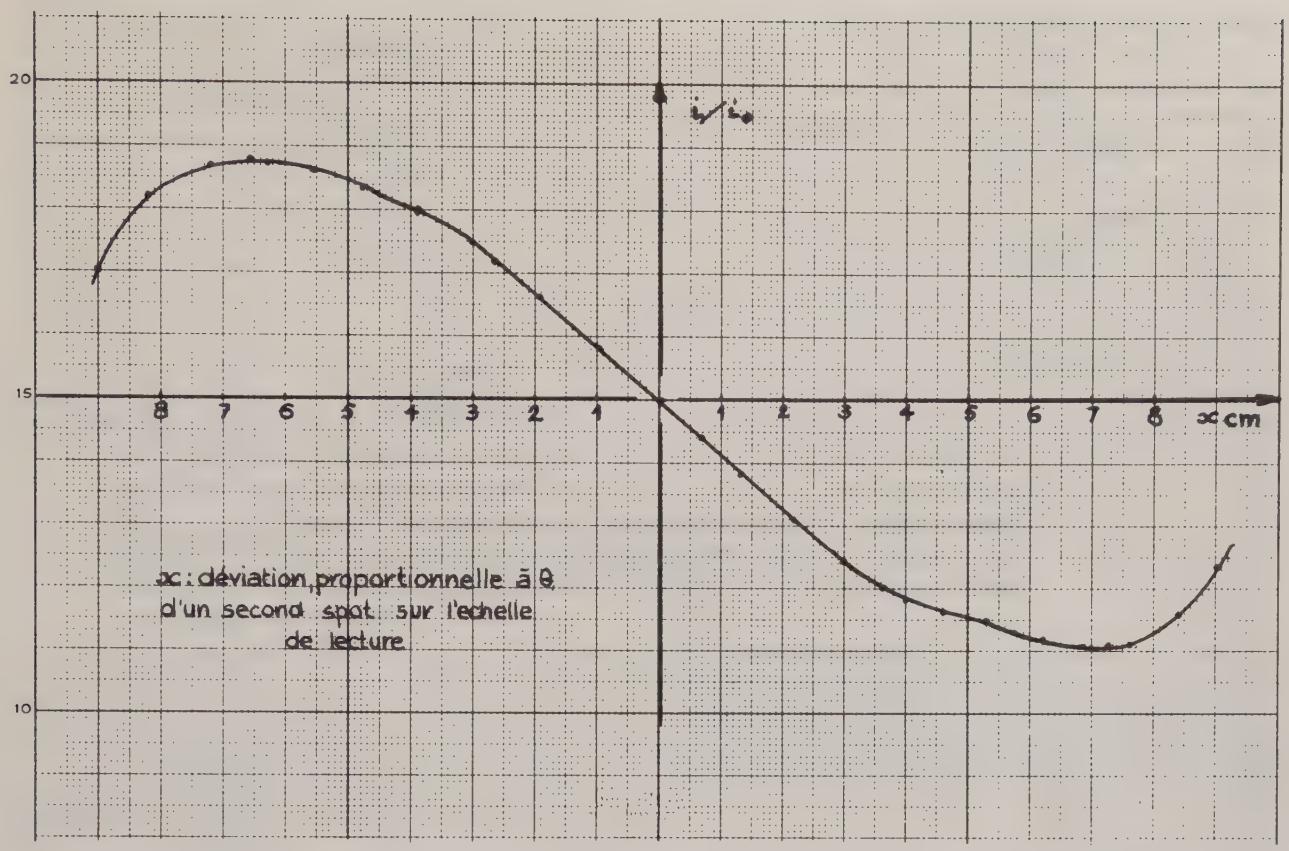

20
15
10
8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 x cm
x : déviation proportionnelle à θ
d'un second spot sur l'échelle
de lecture

Fig. 3

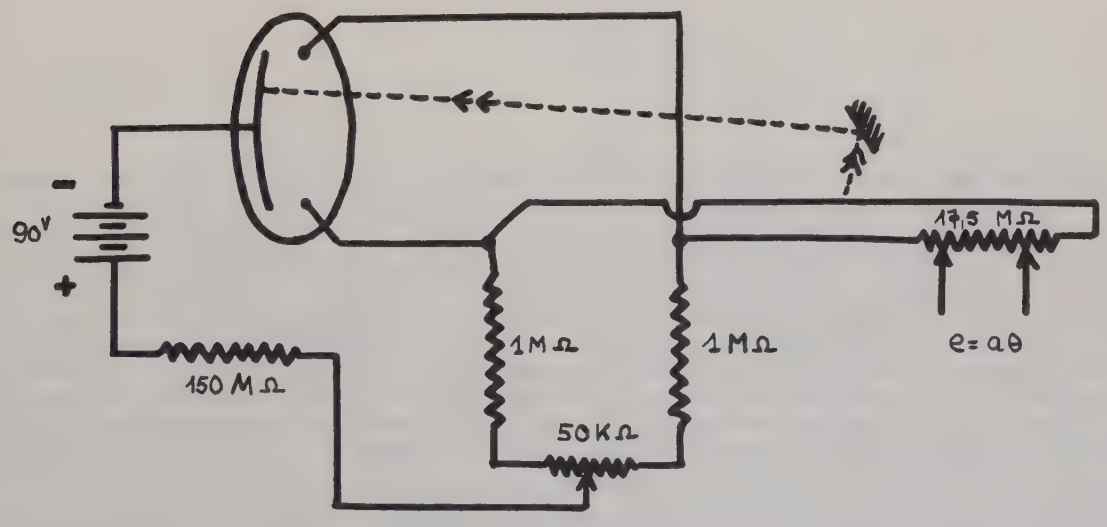

90V
−
+
150 MΩ
1 MΩ
50 KΩ
1 MΩ
17,5 MΩ
e = aθ

Fig. 4

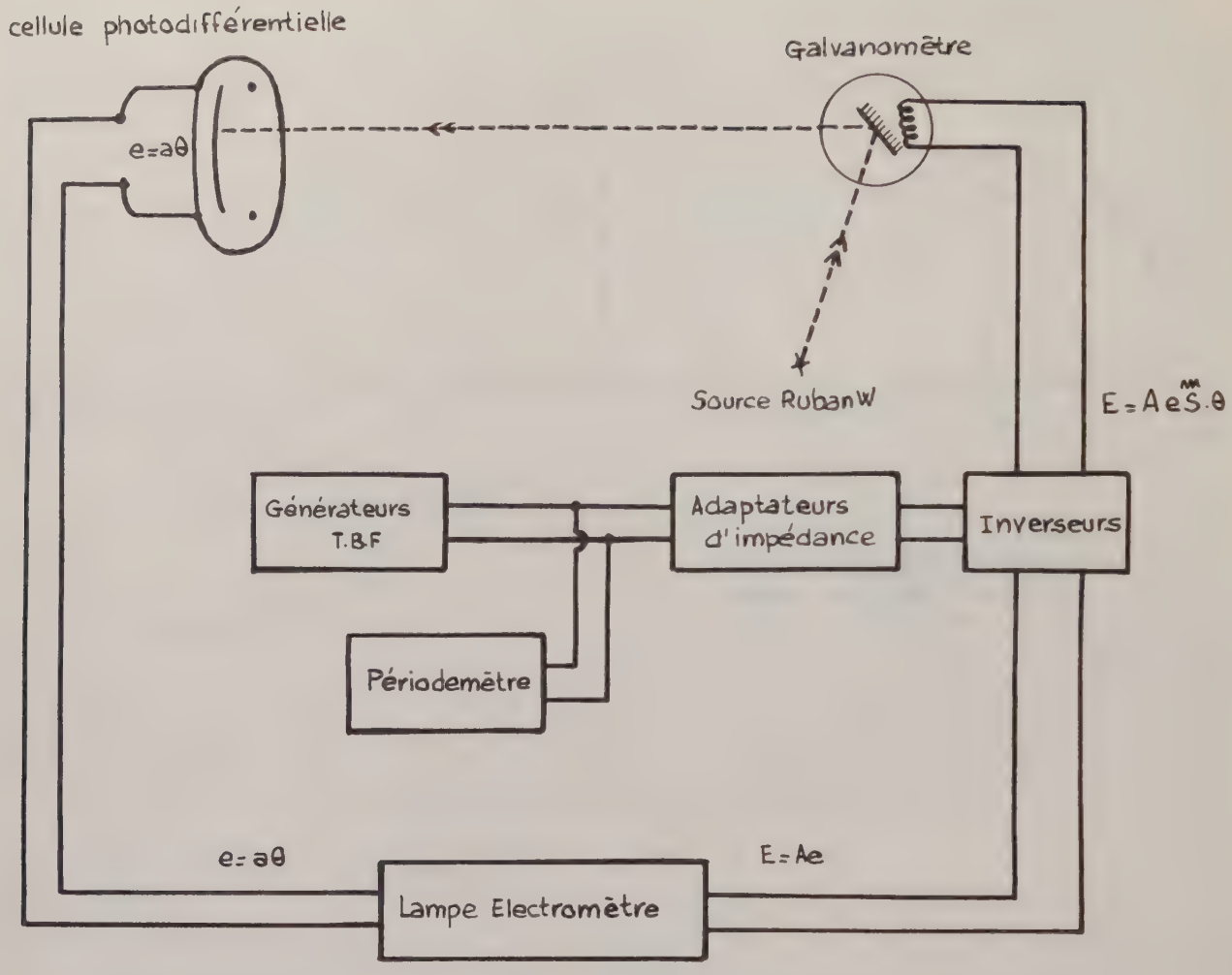


Fig. 5

La cellule photoélectrique différentielle utilisée est une cellule "photodianode" dûe à Deloffre, Pierre et Roig (1 et 2). Cette cellule doit être placée le plus près possible du galvanomètre pour obtenir la plus grande plage de variation possible pour l'angle ϑ. On est cependant limité dans cette voie par le flux de fuite du galvanomètre qui peut rendre très dissymétrique la courbe de réponse $E(\vartheta)$ de la photodianode. Il est nécessaire de blinder et d'augmenter la tension aux bornes de la cellule. Nous avons tracé diverses courbes de réponse $E(\vartheta)$ en faisant varier la distance au galvanomètre, le blindage, le grandissement optique de l'image, et la tension aux bornes. Nous avons finalement choisi une distance de l'ordre de 10 cm par rapport au fil de torsion, un grandissement de 0,9 environ et une tension de 90 volts avec une résistance de 150 MΩ en série. La figure 3 indique l'allure d'une des courbes obtenues. La cellule possède donc une bonne linéarité dans sa zone centrale, qui pour le galvanomètre, (et cette courbe de réponse) correspond à un angle de ±20 milliradian.

La sortie de la cellule est fermée sur une chaîne de résistances (résistance totale $1,75.10^7\ \Omega$) montées sur un disque circulaire en plexiglass et formant potentiomètre. Celui-ci permet de prendre (voir fig. 4) une fraction déterminée de la tension de sortie de la cellule, que l'on peut d'ail-

leurs envoyer directement sur l'inverseur (en ce cas le galvanomètre est en série avec les résistances qu'il ne court-circuite pas). Mais l'expérience montre alors que les valeurs maxima $\varkappa$ du créneau peuvent être du même ordre de grandeur que le terme constant $\lambda = 13,66$. Pour obtenir des valeurs supérieures de $\varkappa$, il faut passer par l'intermédiaire d'un amplificateur. Celui-ci est constitué par une lampe électromètre double MAZDA 6.196 montée en amplificateur différentiel, les tensions de polarisation et de plaque étant fournies par des accumulateurs. La sortie est reliée au galvanomètre par l'intermédiaire de l'inverseur. Le galvanomètre voit donc une résistance extérieure constante à ses bornes. Cette résistance est de l'ordre de $10^2\ \Omega$.

L'inverseur est formé de deux relais SIEMENS polarisés, alimentés par un générateur très basses fréquences C.R.C. (générateur T.B.F. 64), livrant des signaux rectangulaires de fréquence variable de façon continue depuis 500 cps jusqu'à 0,005 cps. Il est nécessaire de régler soigneusement l'appareil et de l'étalonner en fréquence. Mais cet étalonnage s'est avéré d'une précision insuffisante et il nous a fallu construire un périodemètre. La charge minima du générateur T.B.F. étant 5 000 Ω, il a été également nécessaire de construire un adaptateur d'impédance pour alimenter les relais, la résistance de ces derniers étant égale à 500 Ω dans la combinaison choisie. Cet adaptateur est constitué par deux lampes montées symétriquement en cathode follower. Le courant d'alimentation des relais est alors de 8 mA. Dans ces conditions on peut admettre que les relais donnent un bon crénelage jusqu'à 50 cps environ (rebondissements et constante de temps).

I.2 - ETUDE ET MISE AU POINT DU SIMULATEUR.

I.2.1 - Etude du galvanomètre.

Le galvanomètre utilisé est un galvanomètre de marque SEFRAM. Cet appareil a la particularité principale de posséder deux miroirs (plus un troisième miroir auxiliaire fixe) : un miroir supérieur sert à renvoyer, par réflexion simple, l'image d'un ruban lumineux sur la cathode de la cellule tandis que le miroir inférieur et son miroir auxiliaire fixe renvoient, après double réflexion, un spot sur une règle graduée translucide, permettant ainsi de mesurer d'une façon précise la position de l'image du filament sur la cathode de la cellule. Les deux miroirs sont montés à 90 degrés l'un de l'autre (voir fig. 6 et 7).

Le cadre mobile, situé entre les miroirs, fait corps avec eux (voir fig. 8) et tourne autour d'un cylindre de fer doux, permettant ainsi de larges déviations. Les aimants sont des aimants au "Ticonal".

Nous avons effectué un certain nombre de mesures sur le galvanomètre de façon à vérifier ou à déterminer ses caractéristiques principales ainsi que les valeurs numériques de l'équation :

$$\vartheta'' + \left(\frac{f}{I} + \frac{\Phi^2}{R} \cdot \frac{1}{I}\right) \cdot \vartheta' + \left(\frac{C}{I} + \frac{\Phi}{R} \cdot \frac{A}{I} \cdot \overline{\overline{S}}\right) \cdot \vartheta = 0$$

Nous avons trouvé :

Période propre	: T_o	= 1,70 sec
Résistance Interne	: r	= 65 ohm
Résistance Critique Extérieure	: R'_c	= 450 ohm
Résistance Critique Totale	: R_c	= 515 ohm
Sensibilité (avec double réflexion)	: σ_{DR}	= $4,05.10^{-9}$ A/mm/m
Amortissement Naturel	: α	= 0,1345
Constante de torsion	: C	= 0,71 dyne cm/radian
Flux magnétique	: Φ	= 440 000 maxwells
Moment d'Inertie	: I	= 0,052 gr/cm^2

De la sorte l'équation s'écrit finalement :

$$\vartheta'' + \left(0,1345 + \frac{3.740}{R_\Omega}\right) \cdot \vartheta' + \left(13,66 + 8,45.10^{-3} \cdot \frac{A}{R_\Omega} \cdot \overline{\overline{S}}\right) \cdot \vartheta = 0$$

Dans cette équation A est exprimé en unité de tension uem par radian. Si l'on veut exprimer la sensibilité de la cellule en millivolt par milliradian, nous avons (1 volt $\sim 10^8$ uem) : 10^8. a = A.

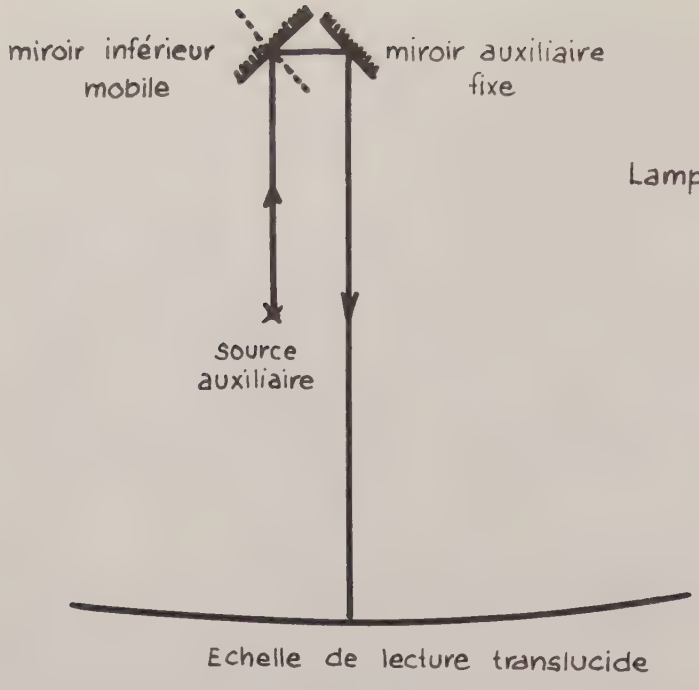


Fig. 6

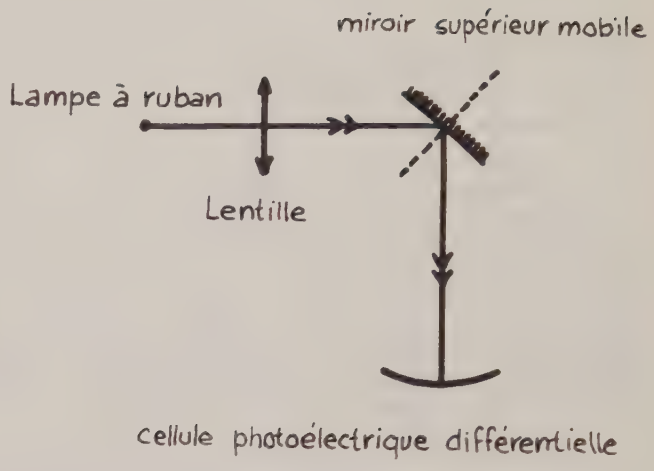


Fig. 7

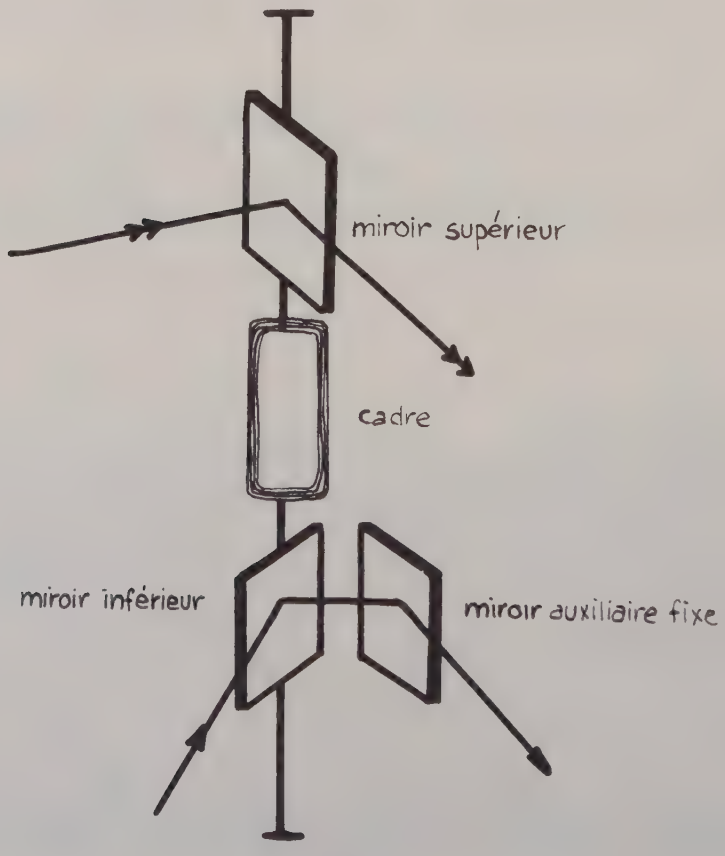


Fig. 8

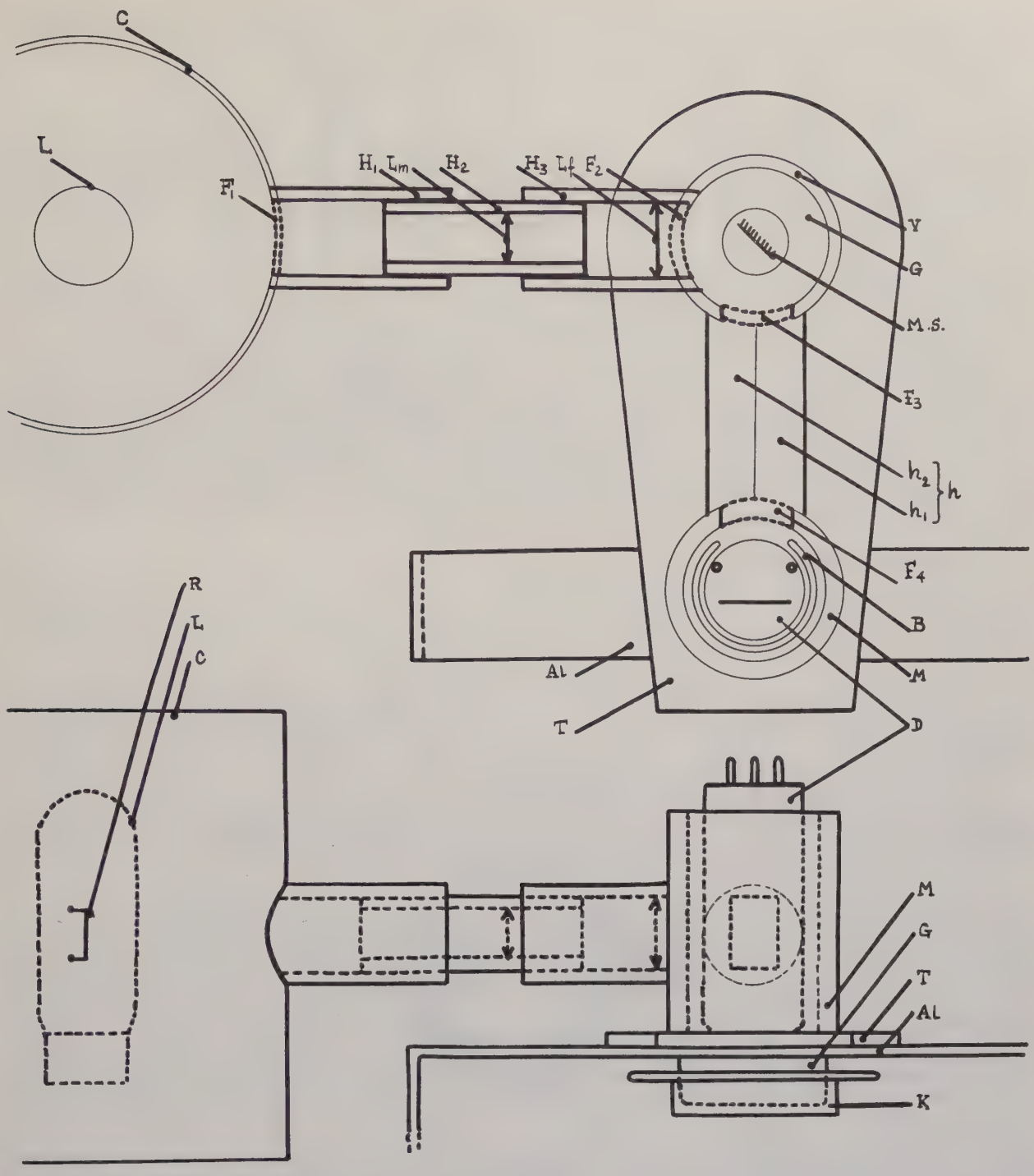


Fig. 9

L = Lampe à ruban de tungstène. R = Ruban rectangulaire (en W). C = Cylindre protecteur en cuivre. F_i = Fenêtre de passage du spot. $H = H_1 + H_2 + H_3$ = Tube horizontal de passage du spot, en bakélite. H_1 et H_3 = Tubes fixes. H_2 = Tube coulissant. L_m = Lentille insérée dans H_2 et permettant la focalisation. L_f = Lentille fixe insérée dans H_3. G = Corps du galvanomètre. K = Cuvette du galvanomètre. V = Cylindre vertical en bakélite, emmanché sur G. M_s = Miroir supérieur du galvanomètre. $h = h_1 + h_2$ = Tube horizontal de passage du spot, en bakélite, scié verticalement en deux parties h_1 et h_2 dans le sens de la longueur pour permettre la focalisation. D = Cellule photoélectrique différentielle. B = Berceau de suspension, en bakélite, pour D. M = Cylindre de blindage magnétique en μ - métal épais. T = Tablette-support horizontal, en bakélite. Al = Languette en aluminium et en forme de U renversé soutenant T.

En réalité il est plus prudent d'obtenir le coefficient $\varkappa = 8,45.10^5 . \frac{a}{R} = 8,45.10^{-3} . \frac{A}{R}$ par expérience directe, lors de chaque mesure. C'est ce que nous ferons par la suite.

I.2.2 - Montage optique.

La source lumineuse a tout d'abord été constituée par une lampe COTTON-MAZDA à filament tendu 6V, 3A. Nous avons finalement adopté une lampe MAZDA à ruban rectangulaire en tungstène 10V, 15A. La raison de ce changement sera indiqué dans l'étude de la cellule photodifférentielle. L'image du ruban lumineux est projetée sur la cathode de la cellule après une réflexion préalable sur le miroir supérieur du galvanomètre. La figure 9 et sa légende schématisent le montage.

Le spot d'observation est créé par un projecteur à distance focale variable qui envoie pour cela l'image d'une fente lumineuse sur le miroir inférieur du galvanomètre. Celui-ci après une double réflexion (sur le miroir inférieur mobile et sur le miroir inférieur fixe) le renvoie sur l'échelle translucide de mesure et d'observation située à environ 60 cm de l'axe du galvanomètre.

La lampe MAZDA est alimentée par une batterie de 4 accumulateurs 12 volts. Le flux émis par la lampe étant très sensible aux variations de la tension nous avons adjoint un chargeur aux accumulateurs, la batterie étant montée en tampon. La fréquence 50 cps redressée passe donc dans le montage par l'intermédiaire de la cellule photoélectrique. Le fait n'est pas gênant sauf pour une fréquence de crénelage voisine, ce qui n'est jamais le cas, les zônes d'instabilité n'apparaissant que pour des fréquences de l'ordre de 1 cps pour les valeurs des coefficients pouvant être obtenues par le simulateur. Le projecteur du spot d'observation est muni d'une ampoule 12 volts alimentée par un simple transformateur.

I.2.3 - Montage antivibratoire.

Du fait de la proximité de machines tournantes et de tables vibrantes dans le bâtiment nous avons été obligés de prendre un certain nombre de précautions pour éliminer les vibrations parasites rendant la lecture malaisée et surtout perturbant le phénomène.

Pour cela nous avons séparé le montage en plusieurs parties : la source lumineuse à ruban, le galvanomètre, la cellule photodifférentielle, le projecteur auxiliaire et l'échelle translucide d'observation, ainsi que la lampe électromètre et ses accessoires comme le potentiomètre plexiglass et l'amplificateur ont été montés sur un châssis antivibratoire posé lui-même sur une lourde table de chêne ; nous avons placé le reste de l'appareillage sur un bâti mobile.

Nous avons construit le montage antivibratoire de la manière suivante : un bâti de 95 cm sur 50 cm environ repose par 4 pieds caoutchoutés sur 4 disques, eux-mêmes suspendus sur ressorts. Disques et ressorts se trouvent dans 4 godets, qui empêchent la torsion des ressorts, maintiennent les disques et limitent les déplacements des pieds en caoutchouc.

Ce bâti supporte lui-même une plaque rigide en duraluminium. Cette plaque repose sur le bâti par l'intermédiaire de quatre ressorts montés d'une façon à peu près identique à celle déjà indiquée. Le montage optique source-ruban, galvanomètre, cellule photoélectrique a été effectué sur cette plaque en prenant encore les précautions suivantes. La lampe ruban et le cylindre protecteur C (voir fig. 9 le schéma du montage optique) sont supportés par un support tripodaire. Ce support n'est pas monté directement sur la grande plaque en duralumin mais sur un petit plateau rectangulaire en même métal, monté élastiquement sur la grande plaque, cette liaison élastique étant toutefois assez serrée. Le support du galvanomètre a été posé sur un lit formé de plusieurs couches de mousse plastique genre frigolite. De même nous avons inséré une mince couche plastique entre l'extrémité de la tablette horizontale T en bakélite et son support en forme de U renversé (voir montage optique).

Le projecteur auxiliaire et la règle d'observation ont été montés directement sur la grande plaque en duraluminium ainsi que le support de la lampe électromètre. Pour des raisons de commodité nous avons toutefois fixé directement sur le châssis le potentiomètre en plexiglass de 17,5 MΩ servant à prélever une partie de la tension aux bornes de la cellule ainsi que les auxiliaires de la lampe électromètre (voir l'étude de la cellule photodifférentielle et l'étude de l'amplificateur).

I.2.4 - Etude de la cellule photoélectrique différentielle.

Cette photodianode comprend une cathode plane photo-émissive et deux anodes rectilignes parallèles à la cathode, situées à égale distance de la cathode comme l'indique la figure 10. Les deux anodes sont branchées au pôle positif d'un même générateur de tension par l'intermédiaire de deux résistances égales élevées (de quelques centaines de KΩ à quelques MΩ) - voir la figure 4 -. La

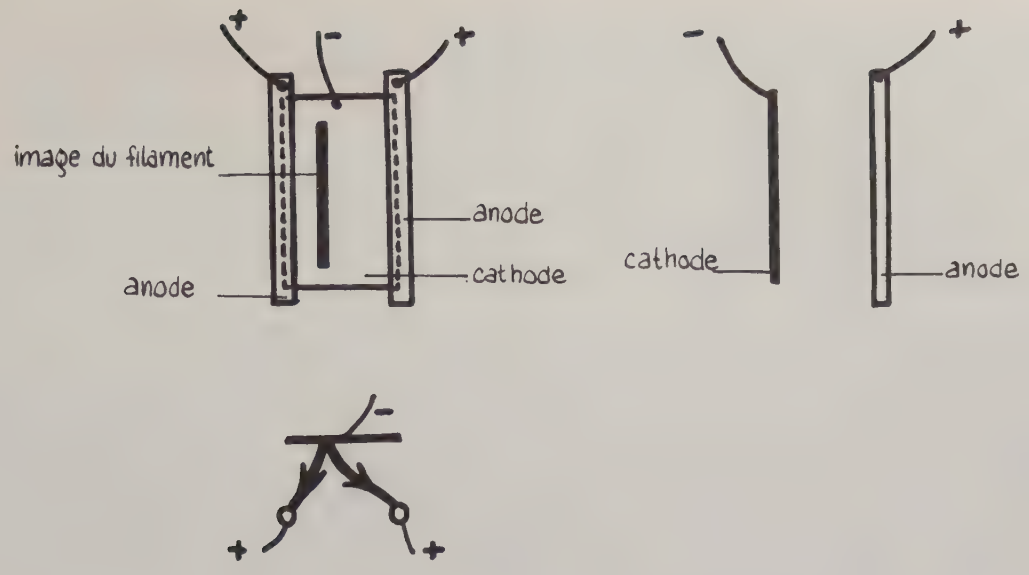


Fig. 10

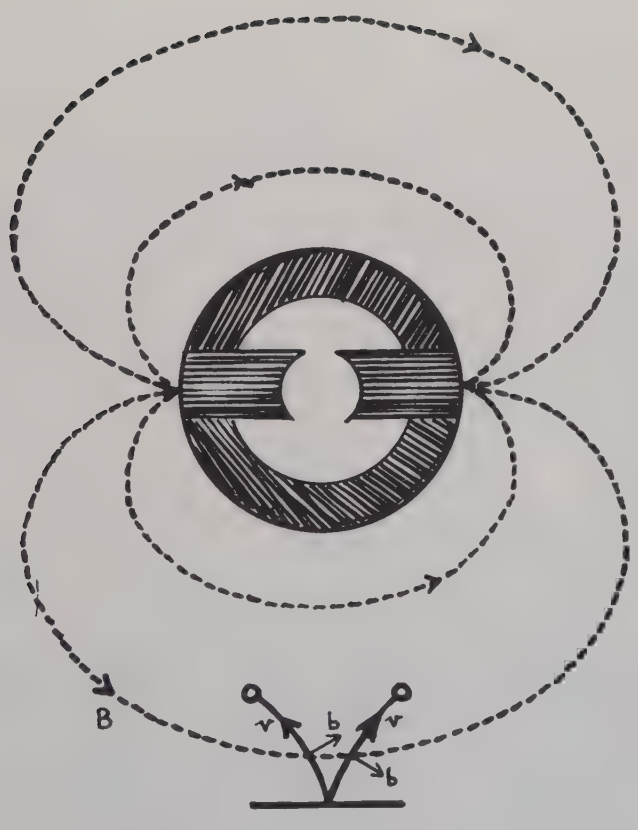


Fig. 11

cathode est branchée au pôle négatif. L'image du ruban lumineux en tungstène est projeté sur la cathode par le système optique après réflexion sur le miroir supérieur du galvanomètre. Cette image se déplace alors parallèlement au grand axe de la cathode (fig. 10). Il en résulte aux bornes des deux anodes une différence de potentiel e, fonction de la position de l'image lumineuse sur la cathode $e = e(\vartheta)$. Deloffre, Pierre et Roig donnent diverses courbes de réponse. Mais ces courbes sont limitées au voisinage immédiat de l'axe (quelques mm) et ne sont généralement pas linéaires. Cette non-linéarité n'est pas gênante dans les applications normales. Malheureusement dans le cas du simulateur nous obligeons la cellule à travailler dans des conditions très strictes, qui exigent la linéarité de la réponse et ce pour des amplitudes les plus grandes possibles (soit ± 9 mm , puisque la largeur de la cathode est de 18 mm environ). C'est sur ces points que nous avons porté notre effort.

Nous avons dû relever pour cela plus de cent courbes de réponse $e = e(\vartheta)$, soit 4.000 pointés environ, chaque courbe comprenant chacune une quarantaine de pointés. Une courbe de réponse $e = e(\vartheta)$ s'obtient en envoyant un courant faible et constant dans le galvanomètre du simulateur : nous pouvons ainsi régler à volonté l'angle ϑ et balayer toute la largeur de la cathode de la cellule par l'image du filament lumineux après réflexion sur le miroir supérieur du galvanomètre. L'angle ϑ est repéré avec précision sur la règle translucide après réflexion sur le miroir inférieur du galvanomètre comme l'indique la figure 6a. Cette règle est située à 60 cm environ de l'axe de suspension du galvanomètre. La largeur de la cathode correspond alors à peu près à ±10 cm sur la règle, ce qui permet une lecture précise des déplacements. Les premières mesures ont été effectuées avec des photodianodes à vide et avec la lampe à filament tendu. Nous avons constaté des courbes de réponse dissymétriques et fort sinueuses. Après quelques essais nous avons attribué ces courbes au flux de fuite du galvanomètre. En effet dans ces mesures nous obtenions le balayage de la cathode par l'image du filament en court-circuitant les bornes du galvanomètre et en faisant tourner l'ensemble du corps du galvanomètre sur son berceau, grâce à une vis micrométrique ad hoc. De ce fait nous ne reproduisions pas les conditions exactes de fonctionnement, puisque le champ de fuite du galvanomètre changeait pour chaque mesure, alors qu'il restait bien entendu fixe en fonctionnement normal. Nous avons donc adopté le balayage par un courant constant déjà décrit plus haut. Mais il était difficile de rendre absolument symétrique l'effet du champ de fuite. Nous l'avons disposé au mieux comme l'indique la figure 11, mais surtout nous avons essayé d'en diminuer l'effet par un blindage magnétique. Nous avons commencé par un blindage de la cellule et d'une partie du corps du galvanomètre par une tôle de μ - métal. Les résultats encourageants obtenus, bien qu'insuffisants (voir la courbe de la figure 12), nous ont conduit à renforcer le blindage de la manière suivante. Nous avons disposé la photodianode à l'intérieur d'un cylindre en μ-métal épais (4 mm), découpé dans un tube de blindage de microscope électronique, la fenêtre de passage du spot ayant été ouverte par fraisage lent (voir le schéma du montage optique). De plus nous avons ceinturé le galvanomètre par une couronne plate toujours en μ - métal de même origine que le cylindre, canalisant autant que possible le flux de fuite, le cylindre en μ - métal entourant la photodianode achevant la protection de la cellule. Nous avons ainsi obtenu de meilleurs résultats, quant à la linéarité de la zone centrale (fig. 13). On peut s'étonner de l'influence du flux de fuite du galvanomètre. Mais il ne faut pas oublier que le centre de la cellule se trouve à 10 cm environ du fil de torsion du galvanomètre. D'ailleurs un calcul simple nous indique que nous devons nous attendre à une perturbation du fonctionnement de la photodianode. En effet les électrons arrivent sur les cathodes avec une vitesse donnée par :

$$v^2 = 2. \left(\frac{e}{m}\right). E. d$$

soit en prenant une tension d'accélération de 50 volts :

$$v^2 \sim 2. (1,76). 10^7. 50. 10^8 = (17,6). 10^{16}$$

soit $v \sim 4. 10^8$ cm/sec $\sim 4\ 000$ Km/sec. Nous pouvons admettre que le fonctionnement de la photodianode n'est pas perturbé tant que le rayon de courbure dû à un champ magnétique reste grand par rapport à la distance parcourue. Or ce rayon de courbure est donné par : $R = \frac{mv}{eH}$. En admettant une vitesse moyenne $v \sim \frac{1}{2}$ (4 000) Km/sec $\sim 2. 10^8$ cm/sec et en prenant $R \sim d \sim 1$ cm nous obtenons :

$$2. 10^8 \sim (1,76). 10^7. H \qquad \text{soit } H \sim 10 \text{ gauss.}$$

Fig. 12

2

Fig. 13

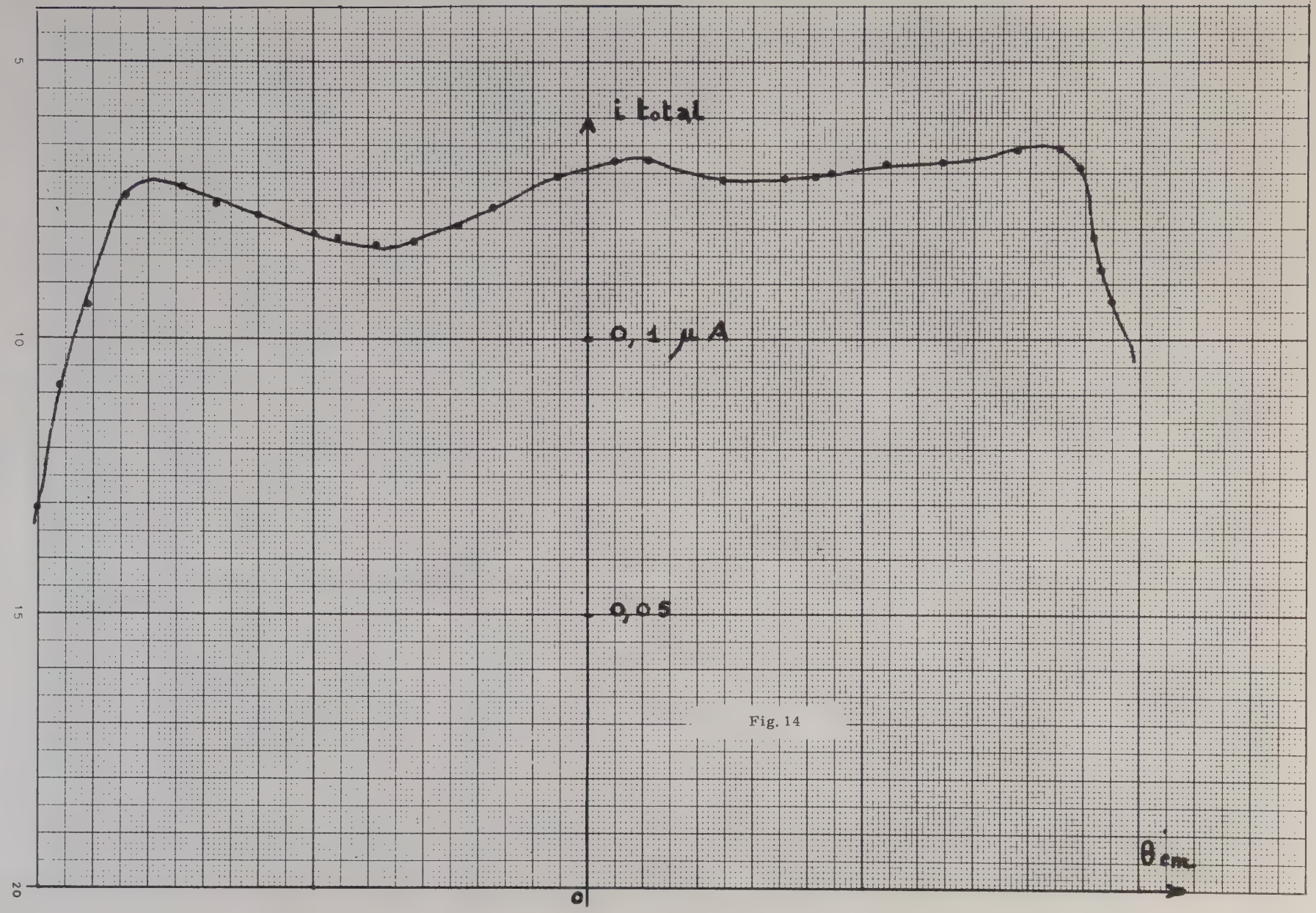


Fig. 14

Fig. 15

Nous nous trouvons donc très vraisemblablement dans ce cas fâcheux, surtout au voisinage de la cathode. Malgré le blindage soigné, nous constations toujours l'existence de deux décrochages (voir les figures précédentes), limitant une zone centrale à peu près linéaire. Nous avons alors pensé que, sinon les décrochages, du moins les sinuosités résiduelles provenaient de la non homogénéité de la cathode. Nous avons donc mesuré le courant total émis par la cathode, en fonction de l'angle ϑ de balagage. Nous avons effectivement trouvé que les cathodes des quelques échantillons que nous possédions étaient assez fortement inhomogènes ($\pm 10\,\%$) comme l'indique la figure 14. Il était intéressant d'essayer de stabiliser ce courant total, ce qui devait vraisemblablement amener sinon une bonne linéarité du moins une bonne symétrie. Malheureusement le courant total émis par la cathode était bien faible, de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-7} ampère même pour des tensions de l'ordre de 50 à 100 volts, ce qui impliquait des "résistances internes" de 1 000 MΩ et plus. Une régulation par lampe était impossible, même montée en jauge à ionisation. Nous avons alors essayé de compenser l'inhomogénéité de la cathode en formant sur celle-ci, une image plus large que celle du filament tendu, dans l'espoir de niveler ces irrégularités par intégration. Nous avons donc abandonné la lampe à filament tendu pour la lampe à ruban rectangulaire. Malheureusement les résultats n'ont pas été sensiblement améliorés. Nous avons alors essayé d'abaisser la résistance interne de la cellule. Pour cela nous avons échangé la photodianode à vide contre une photodianode à gaz, géométriquement identique, et nous avons gardé la lampe à ruban pour augmenter encore le courant total . Nous avons ainsi obtenu un courant total plus de dix fois plus intense soit 1 à 1,5 μ A pour les cellules à gaz en notre possession et ce pour des tensions de l'ordre de 50 volts soit une "résistance interne" de quelques dizaines de MΩ. Nous pouvions alors raisonnablement essayer de réguler. Pour cela nous avons mis une forte résistance en série avec la photodianode, de 50 MΩ à 700 MΩ, la tension pouvant être portée éventuellement jusqu'à 300 volts environ. L'expérience nous a montré qu'effectivement il est possible d'obtenir une certaine régulation du courant total et un effet bénéfique pour la linéarité de la zone centrale. Mais le taux de régulation obtenu est faible. Par exemple la figure 15 nous indique un courant total moyen de 0,36 μ A pour 90 volts et 150 MΩ. La résistance totale est donc : $150 + \rho = 90/0{,}36 \sim 250$ MΩ, donc $\rho \sim 100$ MΩ, le taux de régulation est de 2,5. Un taux de régulation si bas ne peut donc servir qu'à parfaire l'homogénéité d'une cathode déjà assez bien régulière par elle-même (que nous avons eu la chance de trouver). De plus cela indique que la résistance interne est éminemment variable avec la tension. Si celle-ci descend, la cathode débite de moins en moins et au-dessous d'une certaine tension (quelques volts) l'extraction n'est plus régulière dans le temps et s'arrête si l'on descend. D'autre part si nous augmentons la tension, l'accroissement du courant total est de plus en plus limité, nous tendons vers une saturation. Par conséquent dans un cas comme dans l'autre la résistance interne croit considérablement. Il faut donc s'arranger pour tomber dans une zone mixte entre 20 et 80 volts par exemple. Il faut augmenter la résistance en série pour obtenir un taux de régulation acceptable mais il faut aussi augmenter d'une façon importante la tension totale pour obtenir effectivement cette régulation en tombant dans une zone de résistance interne suffisamment faible. En d'autres termes il faut relever systématiquement la courbe $I_{total} = f(u)$, d'où la courbe $\rho = \rho(u)$, d'où le point de fonctionnement sur la droite de régulation $u = E - SI$, S étant la résistance de régulation. Si l'on a pris soin de relever également les résistances partielles internes ρ_1 et ρ_2 , il est alors possible de déterminer à priori les conditions de fonctionnement optimum de la cellule. En supposant la symétrie parfaite et en adoptant les notations de la figure 16 nous avons donc :

$$e = u_{A1} - u_{A2} = (u - Ri_1) - (u - Ri_2) = R\,(i_2 - i_1) = ri$$

et

$$u = Ri_1 + \rho_1 .\ (i_1 - i) = Ri_2 + \rho_2\ (i_2 + i)$$

d'où

$$i_2 - i_1 = u \left\{ \frac{1}{R + \rho_2} - \frac{1}{R + \rho_1} \right\} - i \left\{ \frac{\rho_2}{R + \rho_2} + \frac{\rho_1}{R + \rho_1} \right\} = \frac{r}{R} . i$$

soit finalement les relations :

$$i \left\{ \frac{r}{R} + \frac{R\,(\rho_1 + \rho_2) + 2\,\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)} \right\} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)} \cdot (E - SI)$$

$$e = ri = \frac{(E - SI)}{\left\{ \frac{r}{R} + \frac{R\,(\rho_1 + \rho_2) + 2\,\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)} \right\}} \cdot \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)}$$

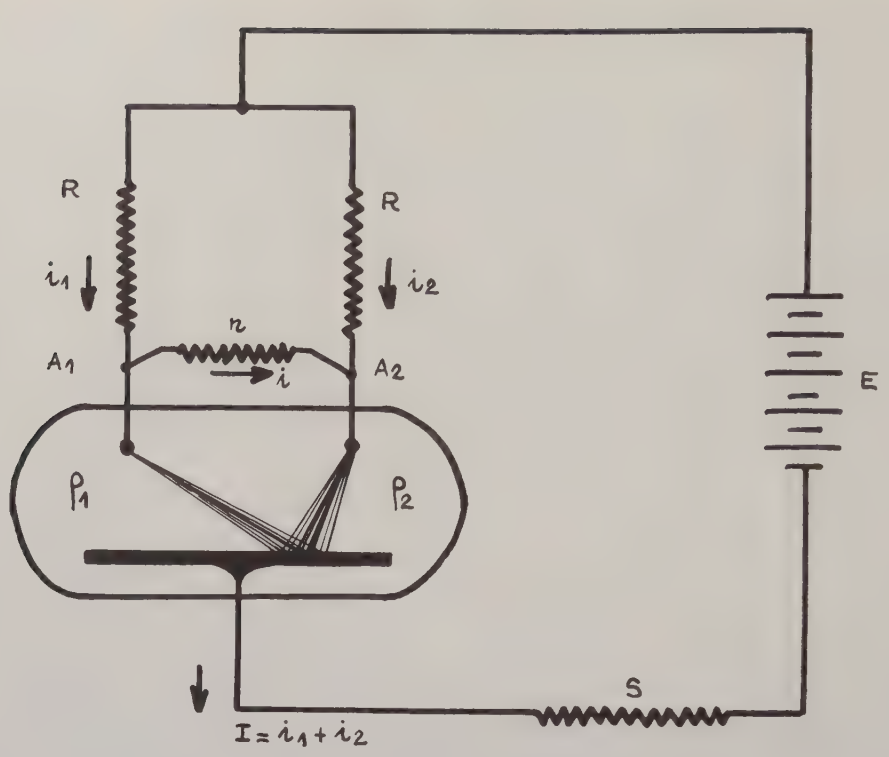


Fig. 16

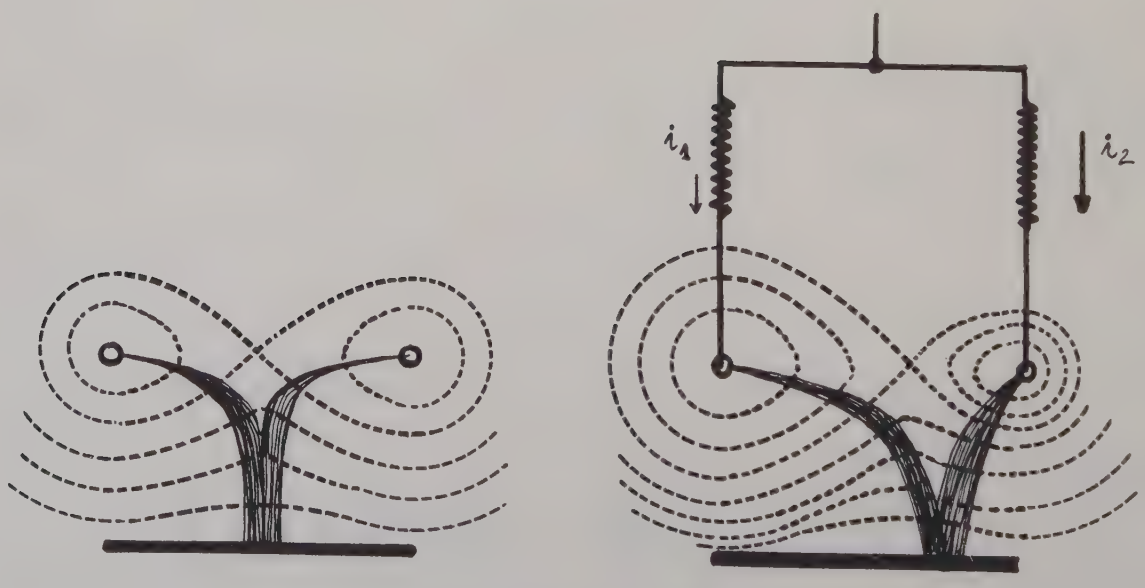


Fig. 17

Dans le cas d'une lampe électromètre directement aux bornes A_1 et A_2 sans potentiomètre ($r = \infty$), nous obtenons :

$$e_\infty = (E - SI). \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + R)(\rho_2 + R)}$$

Dans le cas d'un galvanomètre directement aux bornes de A_1 et A_2 ($r \ll R \ll \rho$), nous obtenons :

$$i \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot (E - SI)$$

Dans le cas d'un courant i bien linéaire nous pouvons poser :

$$\frac{1}{\rho_2} = a + b\vartheta \qquad \frac{1}{\rho_1} = a - b\vartheta$$

avec $a = \frac{1}{2\rho}$ d'où l'on tire évidemment : $i \sim (E - SI).b.\vartheta$

Dans le cas général nous aurons : $i \sim (E - SI) \times f(\vartheta)$, $f(\vartheta)$ étant une fonction symétrique, dont il semble difficile de prévoir théoriquement la forme.

En outre il faut se rendre compte que dans le cas général la photodianode se comporte comme un système à contre-réaction. En effet pour une position ϑ du spot l'une des deux anodes, soit A_2 par exemple (voir fig. 16), voit passer un courant plus important. Sa tension diminue donc par rapport à celle de l'anode A_1, mais ce faisant la distribution des potentiels a été modifiée dans un sens défavorable à l'augmentation du courant passant dans l'anode A_2. C'est ce que schématise la figure 17. De plus à cet effet s'ajoute l'influence de la résistance interanodes.

Nous avons effectué un certain nombre d'essais, toutefois nous n'avons pas relevé la courbe $\rho = \rho(u)$. Même sans régulation, nous avons eu en effet certains ennuis avec la pile d'alimentation de la photodianode. Nous les avons supprimés en montant cette pile sur une plaque de plexiglass épais et ce pour éviter, entre autres, la capture par le galvanomètre de courants vagabonds parasites et supprimer des effets capacitifs fort gênants pour les manipulations. De même nous avons dû monter l'interrupteur et le potentiomètre auxiliaire de la pile sur une plaque de plexiglass montée sur le châssis anti-vibratoire, le bouton de l'interrupteur et l'axe du potentiomètre étant eux-mêmes isolés. Une augmentation de tension n'était donc pas gênante. Par contre l'expérience nous a montré qu'il fallait être prudent dans la voie de l'augmentation des résistances de régulation. En particulier nous avons constaté pour de fortes résistances de l'ordre de plusieurs centaines de MΩ, la possibilité d'oscillations autoentretenues dûes aux capacités parasites.

Malgré l'intérêt d'une étude de la cellule pour elle-même, notre but principal était avant tout de construire un simulateur. Il était déjà difficile de trouver une cellule de bonne géométrie (parallélisme anode-anode, anode-cathode, planéité de la cathode), possèdant une cathode homogène, stable (et non empoisonnée par des traces d'impuretés). Or nous obligions la cellule à travailler au voisinage d'un aimant permanent, c'est-à-dire d'une façon anormale étant donné sa sensibilité aux champs magnétiques parasites et de plus nous exigions d'elle une réponse bien linéaire et d'amplitude la plus grande possible pour pouvoir bien séparer les zones stables des zones instables. C'est pourquoi nous nous sommes contentés de la réponse d'une cellule à gaz, relevée (fig. 18a) et amplifiée par la lampe électromètre (fig. 18b). Comme on peut le voir, la zone centrale semble bien linéaire, ce qui est absolument nécessaire, les moindres irrégularités étant amplifiées par la lampe électromètre : en l'examinant soigneusement, la courbe de réponse, après amplification, présente une légère modulation (voir fig. 18b). Il n'a pas été possible de supprimer les deux décrochages, dont l'importance semble d'ailleurs croître en fonction de la tension et dont l'existence semble une caractéristique du fonctionnement de la cellule.

Par la suite nous avons essayé d'étudier l'influence de la géométrie de la cellule sur la forme de la courbe de réponse et particulièrement sur l'importance des décrochages.

Nous avons tenté 3 modifications tant sur des cellules à vide que sur des cellules à gaz, soit :

a) rapprocher les anodes de la cathode (l'écartement restant invariant).

b) éloigner les anodes de la cathode (l'écartement restant invariant).

c) écarter les anodes (l'éloignement restant invariant).

Fig. 18 a

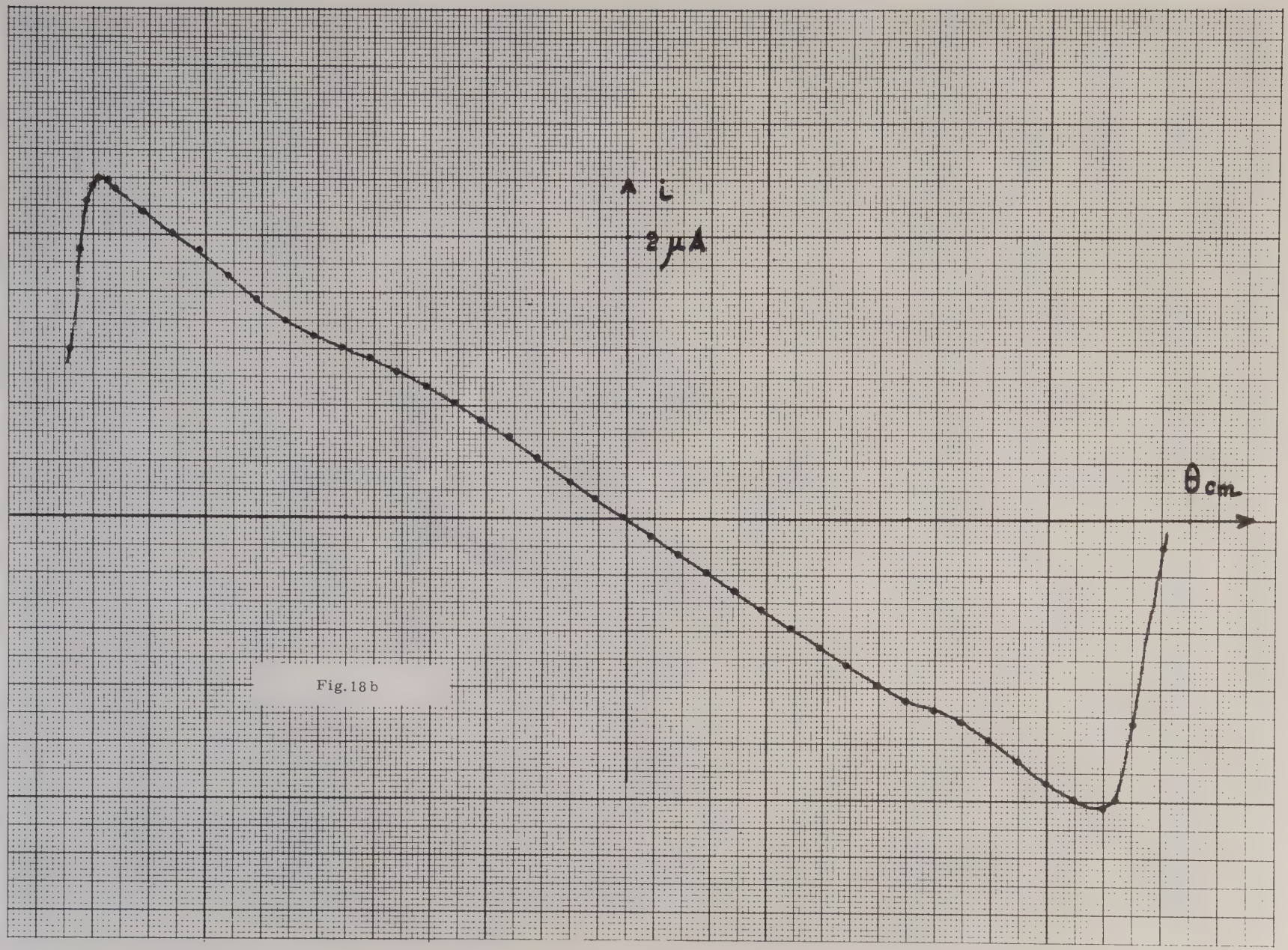


Fig. 18 b

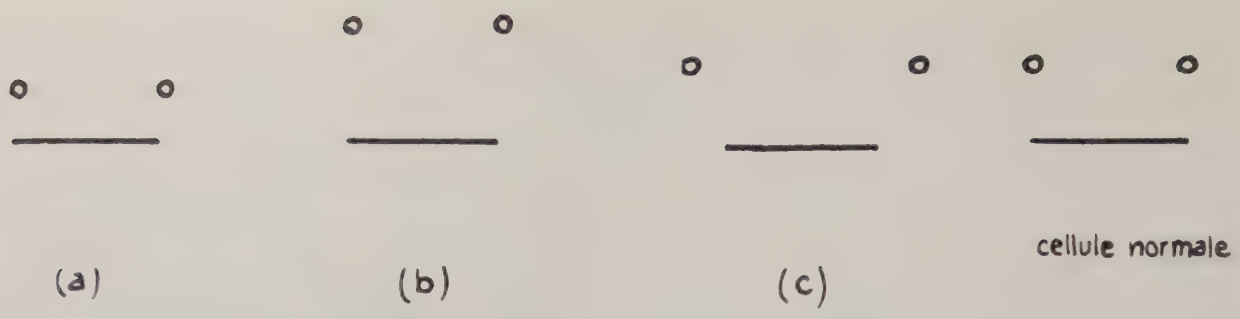


Fig. 19

soit les 3 cas schématisés par la figure 19. Les résultats ont été décevants et peu concluants pour différentes raisons. Il semble toutefois que l'on ait avantage à éloigner les anodes de la cathode (cas b).

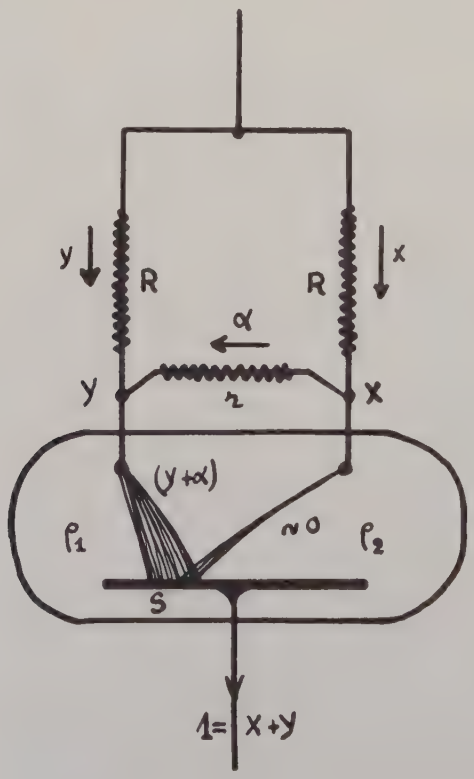


Fig. 20

I. 2. 5 - Couplage de la photodianode.

Avant de passer à la description de la lampe électromètre et à l'établissement de son équation, il convient de faire un certain nombre de remarques concernant le mode d'amplification particulier du montage dû au couplage photodianode-lampe électromètre.

Dans le relevé des courbes de réponse à l'aide d'un galvanomètre auxiliaire ($r \ll R \ll \rho$) - voir figure 20 - on constate expérimentalement que les valeurs maxima du courant différentiel se situent entre 1/2 et 1/3 du courant total I_v pour les cellules à vide. Pour les cellules à gaz, le courant

total I_G est multiplié par 4 environ, tandis que le courant différentiel n'est multiplié que par deux environ soit 1/4 à 1/6 du courant I_G, ce fait semblant pouvoir s'interprêter par l'action dispersive du choc des électrons sur les molécules du gaz.

Nous allons essayer de nous rendre compte de l'influence d'une modification de la résistance interanodes, sur le fonctionnement de la photodianode. Pour cela nous utilisons les notations de la figure 20, c'est-à-dire nous posons :

$$x = \frac{i_1}{I}\,;\quad y = \frac{i_2}{I}\,;\quad \alpha = \frac{i}{I}$$

Lorsque le spot est au centre de la cellule nous avons $\alpha = 0$ soit $y = x = 0,5$ et pour $(y - x)$ qui est proportionnelle à la différence de potentiel interanodique, nous avons $y - x = 0$. Quand le spot s'éloigne du centre, par exemple vers la gauche, α varie, mais nous avons nécessairement les inégalités $y \geqslant x \geqslant \alpha$. Supposons que le courant entre le spot S sur la cathode et l'anode X (voir fig. 20) soit négligeable, lorsque α passe par sa valeur maximum, ce que nous pouvons exprimer d'une autre manière en écrivant $x \sim \alpha_M$. Nous avons là un cas limite exceptionnel pour lequel $1 = x + y \sim y + \alpha_M$. Or nous devons avoir $y \geqslant x$. Donc $1 - \alpha_M \geqslant \alpha_M$ d'où $\alpha_M \leqslant 1/2$. Par conséquent il est impossible d'avoir un courant différentiel supérieur à la moitié du courant total et c'est bien ce que l'on observe expérimentalement.

Dans le cas d'une faible résistance aux bornes des anodes ($r \leqslant R$; cas du galvanomètre) la différence de potentiel interanode est très faible (quelques dizaines de μV). Dans le cas d'une forte résistance interanode ($r \gg R$), la d.d.p. interanode n'est plus nécessairement négligeable. On peut ainsi obtenir un gain en tension considérable de quelques dizaines de μV à quelques centaines de mV.

Ce gain est un gain en tension. Il s'agit de pouvoir l'utiliser. Or l'insertion pure et simple d'un galvanomètre sur les anodes de la photodianode fait s'effondrer la tension interanodique et nous procure un courant interanode au plus égal au 1/4 du courant total (0,3 à 0,4 μV pour une cellule à gaz sans régulation) soit 0,09 μA au plus dans le cas de la cellule à gaz utilisée. De plus une augmentation des résistances de charge R ne peut augmenter suffisamment la d.d.p. interanodique. Si donc nous voulons transmettre la tension différentielle $e = a.\vartheta$ il nous faut nécessairement employer une lampe, qui ne peut être qu'une lampe électromètre car les courants de grille d'une lampe ordinaire sont de l'ordre de 10^{-5}A et au mieux 10^{-6}.

Nous avons utilisé une lampe double électromètre MAZDA 6.196. Nous donnerons plus loin quelques détails sur son fonctionnement. Puis nous établirons son équation et montrerons que la lampe double se comporte comme un générateur de tension $E_o \sim (R_p / \rho + R_p)$. μe et de résistance interne $R_o \sim 2\rho . R_p / \rho + R_p$, ρ étant la résistance interne par élément, μ le coefficient d'amplification d'un élément et e la tension appliquée à la grille de commande. Dans le cas qui nous concerne nous avons $R_p \sim 125.000\ \Omega$; $\rho \sim 40.000\ \Omega$; $\mu \sim 1$ d'où :

$$E_o \sim \frac{125}{165}.\ e \sim 0,76\ e \text{ et } R_o \sim 2.40.\ \frac{125}{165}.\ 10^3 \sim 60.000\,\Omega$$

En conséquence nous pouvons conclure que si nous avons un gain en tension il provient du couplage photodianode- lampe électromètre puisque la lampe électromètre introduit un affaiblissement. Or ce qui nous intéresse finalement c'est le gain en courant. Ce gain en courant provient du fait que la lampe électromètre peut conserver pratiquement la tension interanode importante obtenue par suppression de la faible résistance interanode (galvanomètre) en la reportant sur une résistance interne, suffisamment faible pour éviter un effondrement du courant lors de la fermeture du circuit par "mise en série" du galvanomètre (c'est-à-dire aux bornes des résistances de charge des anodes de la lampe double). Autrement dit pour résumer brièvement son rôle, la lampe électromètre sert de véritable transformateur d'impédance pour le galvanomètre.

Nous pouvons maintenant préciser les considérations très approximatives qui précèdent. Nous avons utilisé une résistance de charge $R_1 = R_2 = R = 1\ M\Omega$. Avec une résistance de 150 $M\Omega$ en série et 90 volts aux bornes, nous avons trouvé un maximum de l'ordre de 0,07 à 0,08 μA soit $\alpha_{max} \sim 0,07/0,36 \sim \frac{1}{5}$. Après amplification par la lampe électromètre, nous avons trouvé une intensité maxima de l'ordre de 2,25 μA (2,4 et 2,1 μA). Or dans l'étude du galvanomètre, nous avons montré que l'équation du système pouvait s'écrire :

$$\vartheta'' + \left(0,1345 + \frac{3.740}{R}\right).\ \vartheta' + \left(13,66 + 8,45.10^5.\ \frac{a}{R}.\overline{S}\right).\vartheta = 0$$

où R ~ 50.000 Ω et où a représente la pente en millivolt par milliradian de la courbe de réponse de la photodianode. La règle graduée translucide est située à environ 60 cm de l'axe de suspension du galvanomètre et les maxima ont lieu pour ± 9 cm environ (9,3 et 8,5 cm soit pour ±(9/60) (1 000/4)~ ± 37,5 milliradian, le coefficient 1/4 provenant de la double réflexion. D'où la valeur de la pente centrale obtenue en mesurant la valeur (fictive du fait du décrochage) correspondant à ±37,5 milliradian, soit : (2,4/37,5) μA/mrad d'où :

$$a \sim \frac{(60\ 000).\ (2,4).\ 10^{-6}.\ 10^3}{37,5}\ \text{mV/mrad}$$

soit :

$$a \sim \frac{(60).\ (2,4)}{37,5}.\ \text{mV/mrad}$$

On en tire la valeur de $\varkappa$, coefficient de la fonction créneau $\overline{S}$:

$$\varkappa \sim \frac{(8,45)}{60\ 000}.\ 10^5.\ \left(\frac{60.\ 2,4}{37,5}\right) \sim (8,45).\ 10^2.\ \left(\frac{2,4}{37,5}\right) \sim 54$$

D'où le rapport maximum $\varkappa / \lambda \sim 54/13,66 \sim 4$ en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Nous pouvons également calculer les courants i_1 et i_2 correspondants aux maxima. En effet nous avons :

$$(y - x).I.R.\ \frac{R_\rho}{\rho + R_\rho}.\ \mu \sim R_o.j$$

j étant le courant traversant le galvanomètre. D'où :

$$(y - x)\ (0,36).10^{-6}.10^6.\ (0,76) \sim 60\ 000\ (2,25).\ 10^{-6}$$

soit : (y - x) (3,6) (7,6) ~(6) (2,25). On en conclut :

$$\begin{cases} y \sim 0,747 \\ x \sim 0,253 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 \sim 0,27\ \mu A \\ i_2 \sim 0,09\ \mu A \end{cases}$$

La tension de commande e de la grille de la lampe électromètre vaut donc :

$$e \sim R\ (i_2 - i_1) \sim 10^6.\ (0,27 - 0,09).\ 10^{-6}.\ \sim 0,18\ \text{volt}$$

au lieu de quelques μV. Il est donc possible d'amplifier une dizaine de fois encore dans la mesure toutefois où la lampe et la photodianode restent linéaires.

I.2.6 - Equation de la lampe électromètre.

Nous avons utilisé un tube double électromètre MAZDA 6.190. Le montage employé est un montage en pont classique (voir le schéma général de la figure 25). Le potentiomètre R_2 permet le règlage du point milieu électrique servant de point neutre au montage. En effet le point milieu théorique ne correspondant pas toujours au point milieu électrique, on évite par ce réglage de provoquer un déséquilibre de l'émission.

L'équilibre du pont étant réalisé par action sur les potentiomètres R_8 et R_{12}, le règlage de la lampe électromètre s'effectue de la manière suivante : R_2 étant fixé à une valeur arbitraire, on règle R_8 pour annuler la déviation du galvanomètre, on achève le règlage par R_{12}. On fait varier le courant filament en agissant sur R_4 et on note le déséquilibre provoqué par cette opération. On ramène R_4 à sa valeur initiale et on répète la même opération pour une deuxième position de R_2 et ainsi de suite. Le point milieu optimum est obtenu lorsque de légères variations de I_f, provoquent un deséquilibre minimum du circuit.

Nous supposons la lampe électromètre parfaitement symétrique (fig. 21). De même le circuit de chauffage du filament commun est supposé bien symétrique, tandis que les tensions e_o de polarisation grille-masse sont prises rigoureusement égales.

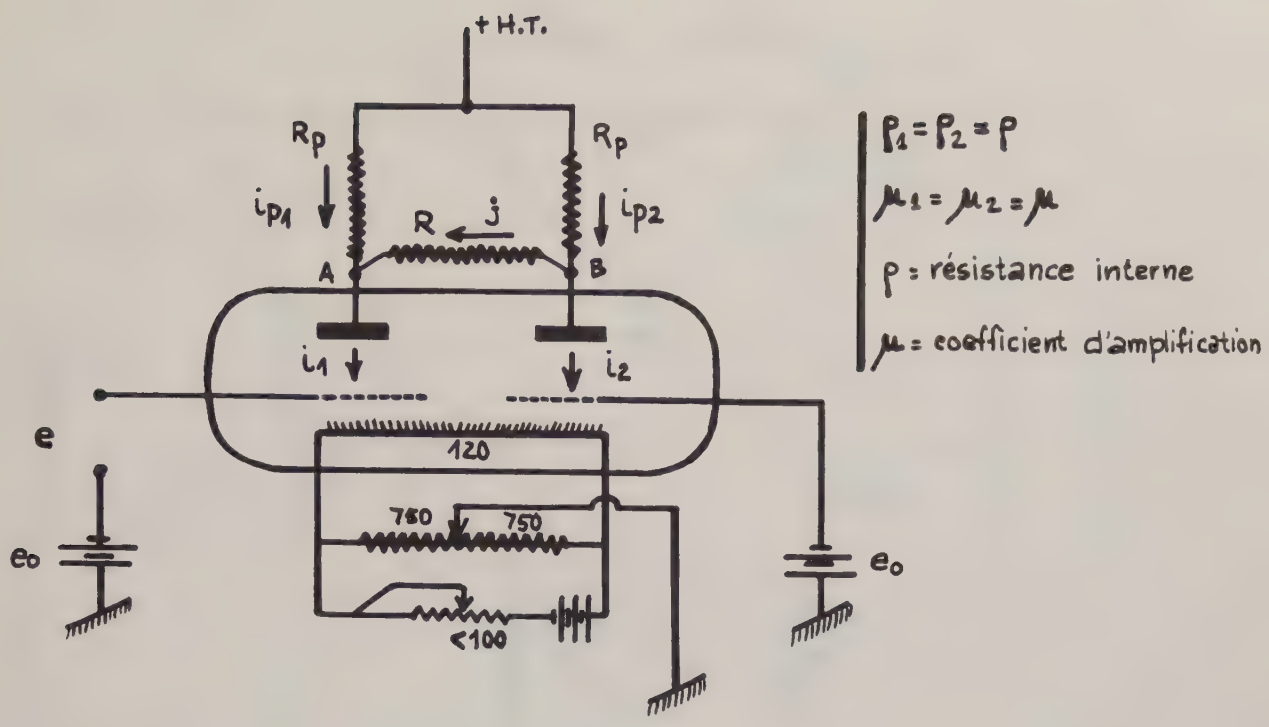


Fig. 21

Dans ces conditions la différence de potentiel $U_A^B = E$ entre les deux anodes est nulle et une résistance R insérée entre les deux points A et B sera parcourue par un courant nul. Nous nous proposons maintenant d'étudier l'effet de l'injection d'une différence de potentiel e sur une des grilles et plus particulièrement son effet sur le courant j parcourant la résistance supplémentaire insérée entre les deux plaques.

Pour cela simplifions tout d'abord le circuit de chauffage du filament. Dans ce circuit nous tenons compte de la résistance propre du filament (120 Ω) en la répartissant d'une manière symétrique comme l'indique la figure 22. Une transformation triangle étoile transforme alors le schéma de la figure 22 en celui de la figure 23, r_f étant la résistance propre à chacune des cathodes et r_p étant la résistance commune aux deux cathodes.

Nous pouvons maintenant écrire l'équation de la lampe en ne nous intéressant qu'aux variations autour de la position de symétrie. Nous trouvons sans difficultés :

$$E = \left\{\frac{R_p}{\rho + R_p + (\mu+1)\, r_f}\right\} \cdot \mu e - 2. \left\{\frac{\rho + (\mu+1)\, r_f}{\rho + R_p + (\mu+1)\, r_f}\right\} \cdot R_p . j$$

Cette équation peut être simplifiée si l'on néglige le produit $(\mu+1).\ r_f$. Cela est justifié car le coefficient μ est très voisin de 1 et la résistance r_f est faible. En effet la transformation étoile-triangle nous donne : $r_f < 110\,\Omega$. Comme $\rho \sim 40\,K\Omega$ et $R_o \sim 125\,K\Omega$, la simplification envisagée est parfaitement justifiée, étant donné la précision des mesures.

Le montage se comporte donc comme un générateur de f.é.m. E_o et de résistance interne R_o, dont les valeurs sont données par :

$$E_o \sim \frac{R_p}{\rho + R_p} \cdot \mu e \qquad R_o \sim 2. \frac{\rho . R_p}{\rho + R_p}$$

Remarquons que R_o est alors la résistance vue aux bornes de A et B, comme l'indique la figure 24.

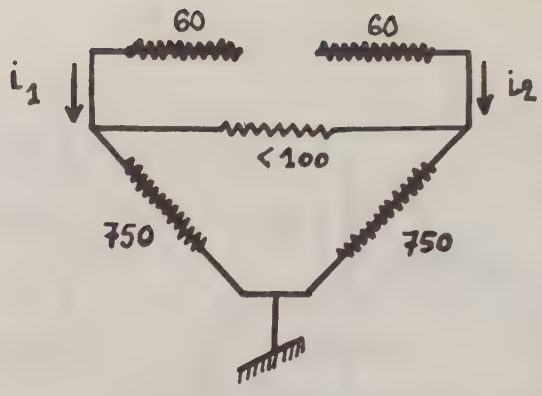


Fig. 22

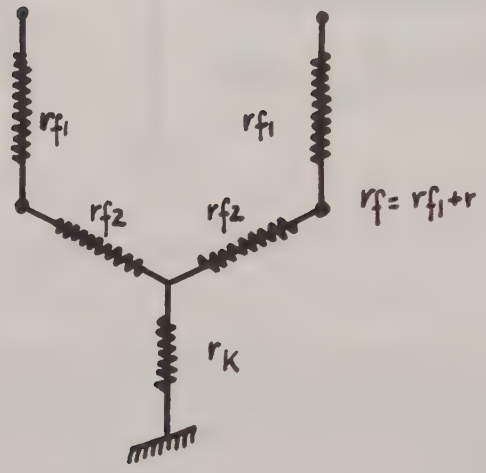
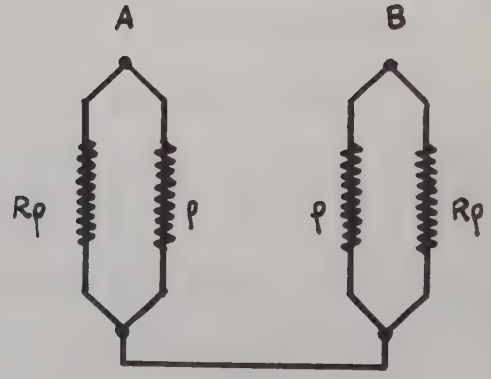


Fig. 23



$$R_{AB} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R\rho}} = R_0$$

Fig. 24

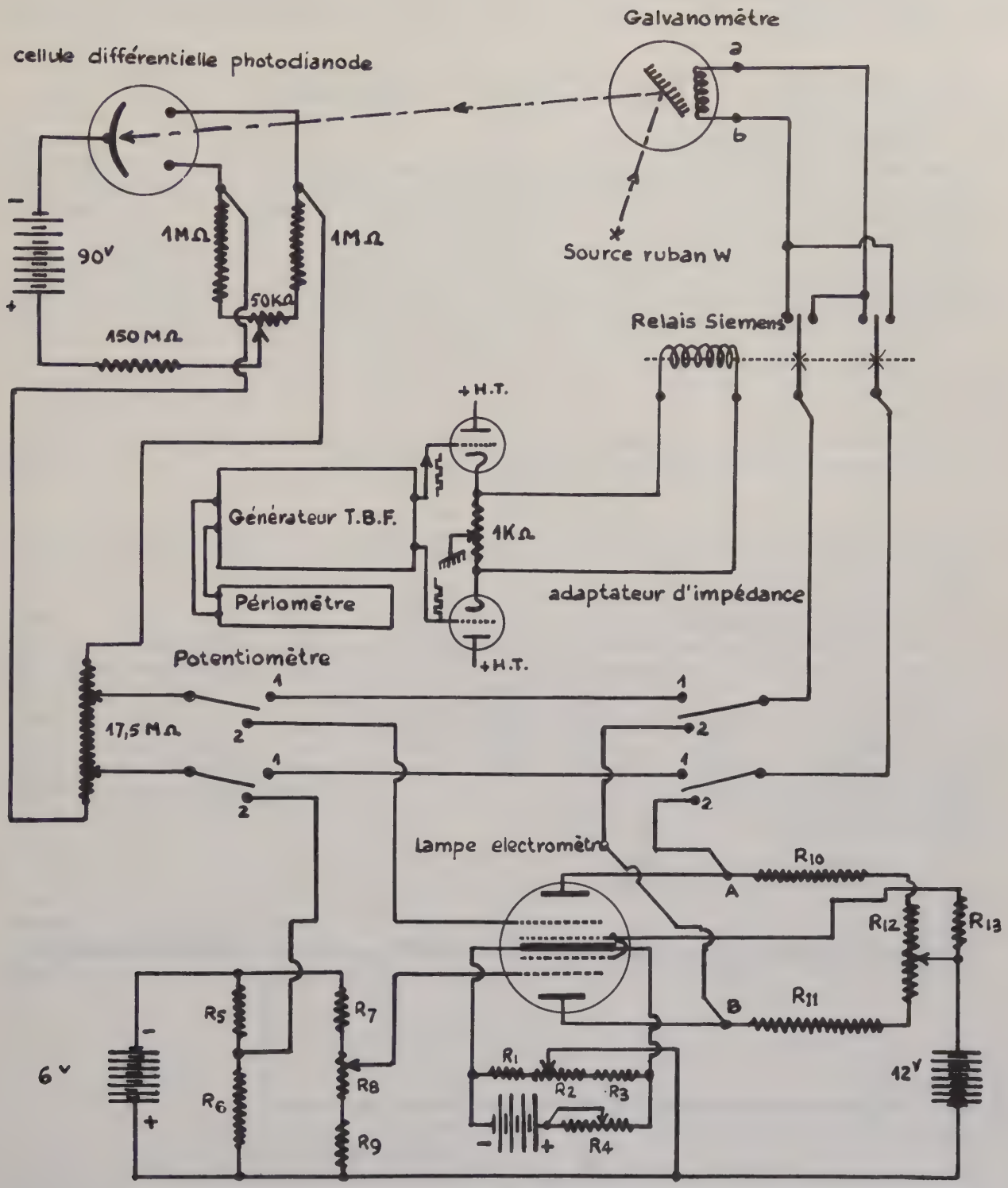


Figure 25. - Schéma général de l'appareil.

I. 2. 7 - Schéma général.

Nous avons étudié en détails les différents éléments du simulateur - sauf les appareils annexes. Nous pouvons cependant en donner le schéma général. Nous retrouvons ainsi sur la figure 25, le schéma de la figure 2.

Nous allons maintenant donner quelques détails sur les appareils annexes, soit le générateur T. B. F., le périodemètre, l'adaptateur d'impédance et les relais SIEMENS.

I. 2. 8 - Générateur très basses fréquences.

Nous avons commencé par alimenter les relais SIEMENS par un générateur de créneaux très basses fréquences, formé par un multivibrateur libre, construit suivant un schéma classique. Cet oscillateur s'étant avéré de performances insuffisantes et d'emploi incommode, il nous a fallu employer un appareillage plus évolué.

Le générateur finalement utilisé est un générateur très basses fréquences "G. B. 64" de marque "C. R. C. " pouvant fournir des signaux rectangulaires (ou triangulaires ou sinusoïdaux ou impulsionnels) de fréquences très basses, allant de 500 Hz à 0, 005 Hz soit de une période en 2 millisecondes à une période en 200 secondes, la fréquence se lisant sur un cadran gradué.

L'impédance minima de la sortie étant de l'ordre de 5 KΩ et la résistance totale des relais SIEMENS étant de 500Ω, il nous a fallu construire un adaptateur d'impédance dont on trouvera le détail un peu plus loin.

De plus nous avons construit un chronomètre électronique pour la mesure précise de la période T du créneau et de sa dissymétrie algébrique :

$$d = (T_1 - T_2) / T$$

et nous éviter ainsi une cause d'erreur importante dûe au générateur T. B. F. (même avec une courbe d'étalonnage).

I. 2. 9 - Chronomètre électronique.

Nous allons donner quelques détails sur le chronomètre électronique ou périodemètre que nous avons construit afin d'obtenir une mesure commode et précise de la période des créneaux et de leur dissymétrie.

La mesure d'une fréquence revient à effectuer un comptage d'impulsions provenant du phénomène à étudier et cela pendant un temps constant, déterminé, lui, par l'appareillage de mesure (quartz). Par contre la mesure d'une période revient à effectuer un comptage d'impulsions, dûes, à l'appareillage de mesure (quartz), et ce, pendant un intervalle de temps déterminé maintenant par le phénomène à étudier (c'est-à-dire déterminé ici par le début et la fin d'une période). Le schéma de principe sera donc le suivant (voir fig. 26) :

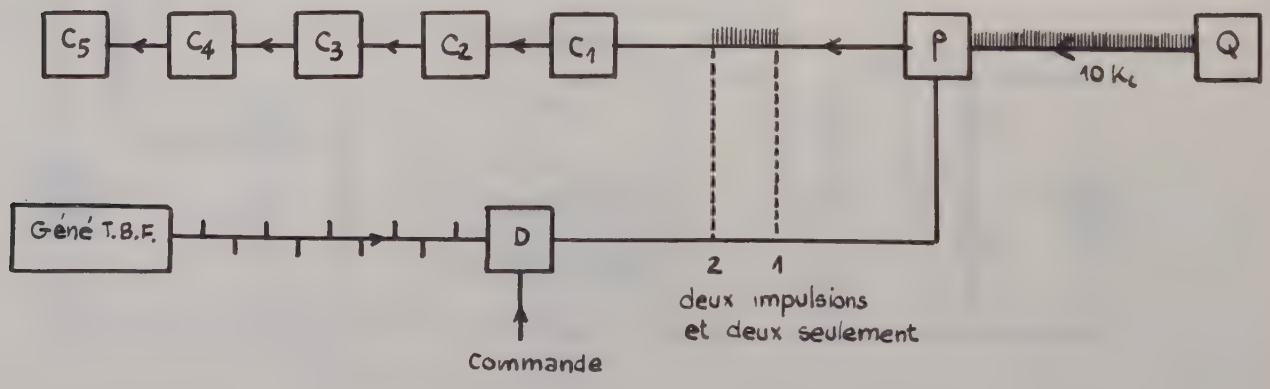


Fig. 26

Un quartz Q (de 10 Kc) envoie d'une façon continue des impulsions dans une porte P dont le rôle est de bloquer éventuellement le passage de ces impulsions dans des tubes compteurs décimaux C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, dont la capacité de comptage maxima est donc 99 999 ~ 100 000 impulsions. La porte P est elle-même pilotée par un organe D que nous appellerons "discriminateur", dont le rôle est fondamental.

En période d'attente le discriminateur bloque normalement la porte ; les impulsions du quartz ne passent donc pas dans les tubes compteurs (supposés remis à zéro). Le discriminateur est alors mis en état d'alerte par l'opérateur par le jeu d'un bouton poussoir. Le phénomène à étudier étant supposé traduit en impulsions conformes à certaines normes, la première de ces impulsions se présentant à l'entrée du discriminateur après sa mise en état d'alerte par l'opérateur, débloque le discriminateur qui débloque la porte : les impulsions passent et les tubes se mettent à compter. La seconde impulsion conforme aux normes imposées se présentant à l'entrée du discriminateur bloque alors celui-ci, qui bloque la porte : les impulsions ne passent plus, les tubes compteurs s'arrêtent, affichant ainsi directement (en unités égales à 10^{-4} sec.) la valeur de la période. Mais, et c'est là le fait fondamental, toute autre impulsion (normée ou non), suivant la seconde impulsion (soit la 3ème, 4ème etc...) laisse maintenant le discriminateur indifférent, permettant ainsi l'affichage permanent de la période, sans quoi les compteurs marcheraient d'une manière discontinue. Une nouvelle mesure nécessite alors de la part de l'opérateur :

1/ une remise à zéro des compteurs.

2/ une nouvelle mise en état d'alerte du discriminateur.

Nous avons employé des tubes compteurs ElT à base 10, construits, ainsi que le quartz (10 Kc) et la porte, par PHILIPS. Le fonctionnement du discriminateur d'impulsions que nous avons construit (schéma fig. 27) nécessite des explications un peu plus détaillées.

Une mesure vient d'être faite et les compteurs décimaux viennent d'être remis à zéro par une impulsion ad hoc, déclanchée par un bouton poussoir n°1. Le discriminateur est alors débloqué manuellement par un bouton poussoir n°2, qui coupe la H.T. aux bornes des deux tubes à gaz Z 70 U. Le bouton poussoir revenant à sa position de repos, les tubes à gaz sont à nouveau sous tension, mais la grille d'attaque du tube de gauche (entrée n°1) est polarisée à 135 volts environ, tension insuffisante pour amorcer le tube à gaz ; quant à la grille d'attaque du tube de droite (entrée n°2), elle est à la masse. Une impulsion suffisamment positive se présentant à l'entrée n°1 débloque le tube de gauche. Ce faisant la tension du point P saute brutalement de 0 à + 45 volts environ, tension suffisante pour débloquer la porte (primitivement bloquée par la mise à la masse du point P) qui laisse alors passer les impulsions du quartz. De même le saut brutal de tension du point Q polarise soudainement le tube de droite, sans toutefois pouvoir l'amorcer. Une impulsion suffisamment positive se présentant à l'entrée n°2 débloque le tube de droite. Mais ce faisant la tension de plaque du tube de gauche s'effondre suffisamment pour le désamorcer. La tension du point P retombe à la masse, la porte se referme brutalement, interdisant le passage des impulsions du quartz vers les tubes compteurs. Le discriminateur est alors verrouillé. En effet toute autre impulsion venant sur l'entrée n°1, ne peut débloquer le tube de gauche, celui-ci étant désamorcé par le tube de droite et toute autre impulsion venant sur l'entrée n°2 ne change rien à l'état conducteur du tube. Nous avons bien obtenu ainsi la discrimination des deux premières impulsions (positives), puis le verrouillage irréversible du discriminateur. De plus remarquons pour terminer qu'il est parfaitement possible de mettre les deux entrées en parallèle.

Toutefois si un tel montage permet de mesurer la période totale avec une bonne précision, il ne permet pas de mesurer séparément les demi-périodes :

$$T_1 = \frac{T}{2}.\ (1 + d) \text{ et } T_2 = \frac{T}{2}.\ (1 - d)$$

d'où la dissymétrie :

$$d = (T_1 - T_2) / T$$

Pour cela il nous faut attaquer séparément les deux entrées suivant le schéma de la figure 28. Les créneaux étant différenciés, nous obtenons une suite d'impulsions alternativement positives et négatives. Une première diode permet alors de sélectionner les impulsions positives sur une première voie et une deuxième diode des impulsions négatives sur une deuxième voie. Les impulsions positives de la première voie peuvent être envoyées directement sur l'entrée n°1, du discriminateur. Les impulsions négatives de la deuxième voie doivent auparavant attaquer une lampe déphaseuse.

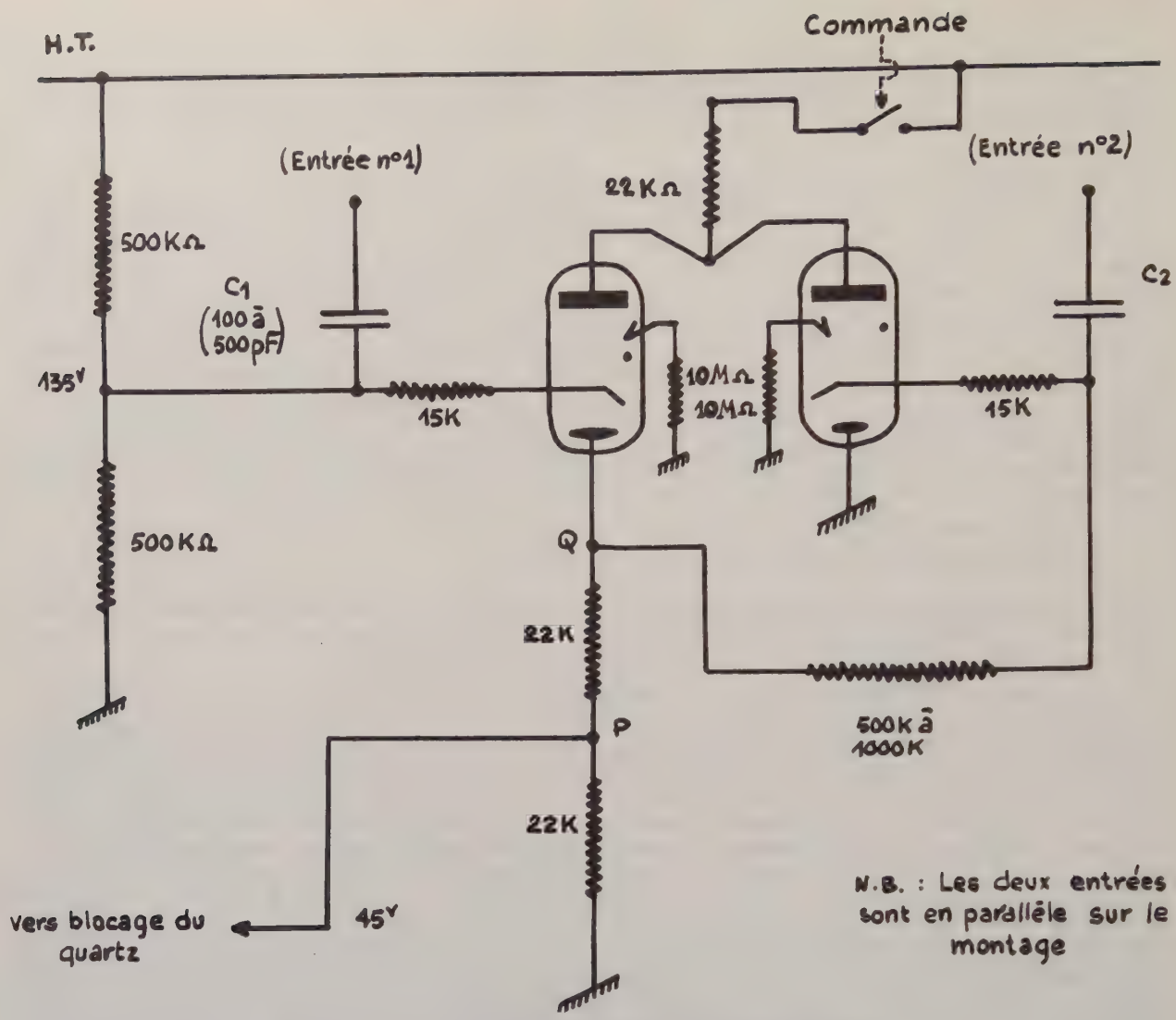


Figure 27 - Discriminateur d'impulsions du périodemètre.

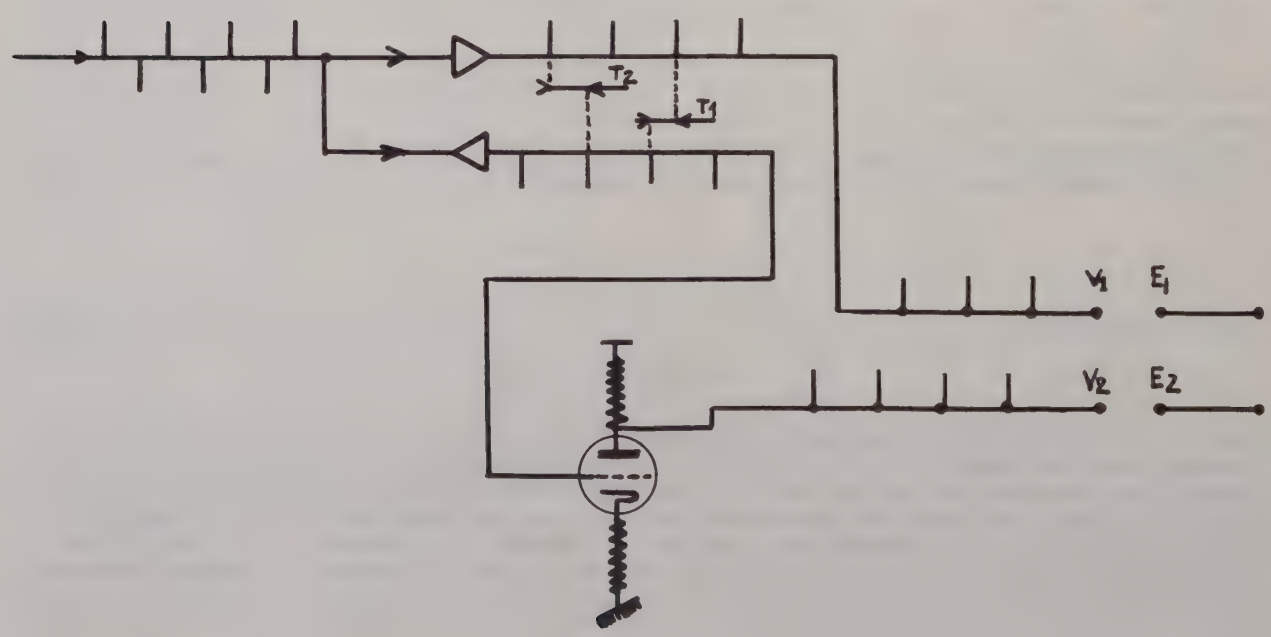


Fig. 28

Le changement de signe obtenu permet alors d'envoyer les impulsions sur l'entrée n°2 du discriminateur, il est ainsi possible de mesurer la demi-période T_1 séparant les impulsions positives des impulsions négatives. Pour mesurer la demi-période T_2 séparant les impulsions négatives des impulsions positives, il suffit de croiser les connexions V - E.

I. 2. 10 - Adaptateur d'impédance.

L'adaptateur d'impédance est constitué par deux doubles lampes montées symétriquement en cathode follower comme l'indique la figure 25 ; l'alimentation n'a pas besoin d'être stabilisée, une simple régulation par tubes néon suffit.

L'adaptateur est attaqué directement en ses grilles par la tension crénelée prise à la sortie du générateur T.B.F. La tension aux bornes des relais est donc elle-même crénelée ; le courant maximum passant à travers les bobinages est alors de 8 mA. Dans ces conditions l'expérience montre que les relais bien réglés donnent un bon crénelage comme nous allons le voir.

I. 2. 11 - Etude des relais.

Les relais sont des relais SIEMENS polarisés (Trls 63a, Tbv 3 302/1). Leur principe est le suivant : le flux d'un aimant permanent se superpose dans un entrefer, à un deuxième flux dit flux de commande ou flux d'excitation ; le flux permanent traverse une armature et bifurque de telle façon que le flux de commande et le flux permanent s'additionnent dans une partie de l'entrefer et se soustraient dans l'autre ; l'armature s'inverse toujours du côté où le flux est le plus puissant, sa position dépend donc du sens du flux de commande donc du sens de la tension d'excitation ; les armatures de ce relais pivotent sur un ressort dont le réglage de la force par rapport à la force dûe au flux permanent permet d'obtenir différents comportements, pour une même allure du flux de commande. Dans notre cas, les relais sont à deux positions de repos de l'armature.

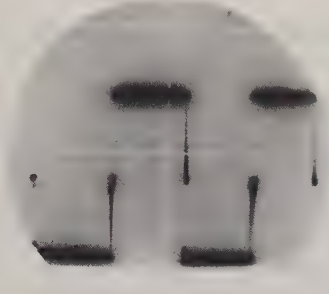


Fig. 29

Toute tension périodique d'amplitude supérieure à un certain seuil peut donc les actionner. Toutefois pour obtenir un fonctionnement correct du simulateur, le basculement doit être le plus bref possible. Du fait de la périodicité, les constantes de temps électriques ou mécaniques ne jouent pas un rôle prépondérant, bien qu'ayant intérêt à être les plus brèves possibles. Ce qui importe c'est le temps d'attraction et de passage d'un contact à l'autre. L'existence possible de rebondissements est une autre cause de perturbations importantes. En conséquence nous avons intérêt à alimenter les relais avec un signal en forme de créneaux et d'intensité très supérieure à un certain seuil. Ce seuil peut être déterminé approximativement par des tables données par le constructeur. L'adaptateur d'impédance à cathode follower que nous avons construit, nous permet de débiter 8 mA dans les relais, ce qui est très suffisant comme l'indique la figure 29. Celle-ci montre à l'oscillographe le crénelage d'une tension continue par les relais pilotés par un signal en créneaux d'une fréquence de 25 cps environ par l'intermédiaire de l'adaptateur en cathode follower. Les demi-créneaux représentent donc 20 millisecondes.

Nous pouvons constater ainsi des temps morts de l'ordre de 1 et 2 millisecondes. Le réglage des relais étant très délicat, il est difficile de faire mieux. Mais pour des créneaux de très basses fréquences (1 cps et même moins), ces temps sont négligeables.

Pour terminer signalons un autre montage possible (voir la figure 30) ne nécessitant qu'un seul relais. Il présente toutefois le désavantage suivant : si les résistances sont faibles, l'amortissement du galvanomètre n'est plus négligeable, ce qui peut être ennuyeux ; si l'on augmente les

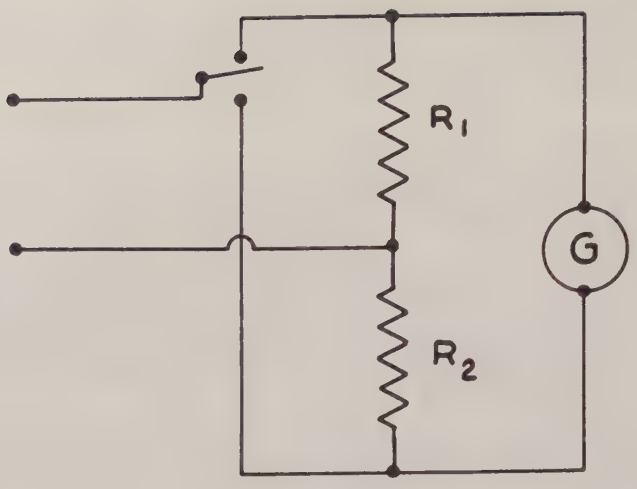


Fig. 30

résistances, la résistance aux bornes des anodes de la lampe électromètre n'est plus négligeable par rapport à la résistance interne, par conséquent le courant maximum diminue.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

(1) DELOFFRE Pierre et Roig - CRAS, 1953, 1507-1509.

(2) DELOFFRE Pierre et Roig - CRAS, 1954, 1213-1215.

CHAPITRE II

DIAGRAMME DE STABILITÉ DE L'ÉQUATION SANS AMORTISSEMENT ET A CRÉNEAUX SYMÉTRIQUES : $y'' + (\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}})\, y = 0$

II. 1 - CALCUL A GRANDE ECHELLE DU DIAGRAMME DE STABILITE.

II. 1. 1 - Diagramme de stabilité.

L'équation sans amortissement, à créneaux symétriques : $y'' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T).]\, y = 0$ dont nous nous occupons est une équation du genre de Hill. La forme générale de cette équation est déterminée par le théorème de Floquet, dont nous donnerons plus loin une présentation originale (voir le chapitre VII). Ce théorème nous permet d'écrire la solution générale sous la forme :

$$y(t) = A . e^{\mu t} . \Phi(t) + B . e^{-\mu t} . \Psi(t)$$

$\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ étant des fonctions périodiques de période T.

Si l'exposant caractéristique μ a une partie réelle non nulle, l'un ou l'autre des deux termes de y rend la solution instable. Les solutions stables sont obtenues pour :

$$\text{Partie réelle de } \mu = 0.$$

Les solutions de Floquet généralisent donc les solutions $y = a . e^{rt}$ des équations différentielles à coefficients constants. Pour plus de détails on consultera Bertein (1), Vogel (2), Strutt (4).

La recherche des exposants caractéristiques permet d'étudier la stabilité des équations de Hill et de tracer un diagramme de stabilité dans un plan dont les coordonnées sont fonction des divers paramètres λ, $\varkappa$, T. Dans le cas qui nous intéresse, ce diagramme se trouve dans Strutt (3 et 4) ou Brillouin et Parodi (5). Il est reproduit sur la figure 31. Comme on peut le voir ce diagramme comporte de nombreuses zones de stabilité, principalement dans le premier (et huitième) octant. Remarquons l'existence de points doubles, contrairement au diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu.

II. 1. 2 - Etablissement des conditions de stabilité.

L'établissement des conditions de stabilité de l'équation $y'' + (\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T).)\, y = 0$ par la méthode matricielle est maintenant classique. Il s'agit d'ailleurs d'un cas particulier de cas plus généraux que nous étudierons plus loin dans les chapitres III et IV, auxquels nous renvoyons pour les démonstrations.

La condition de stabilité s'écrit : (Cette condition a été donnée la 1e fois par Meissner) (7)

$$-2 \leqslant 2 \cos\left(\frac{aT}{2}\right) . \cos\left(\frac{bT}{2}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) . \sin\left(\frac{aT}{2}\right) . \sin\left(\frac{bT}{2}\right) \leqslant 2$$

avec :

$$a = \sqrt{\lambda + \varkappa} \qquad\qquad b = \sqrt{\lambda - \varkappa}$$

T étant la période du créneau supposé symétrique.

Comme la zone de variation des paramètres du simulateur nous limitait pratiquement aux deux premières zones, nous avons recalculé avec soin cette partie du diagramme général, de façon à obtenir une zone utile à grande échelle.

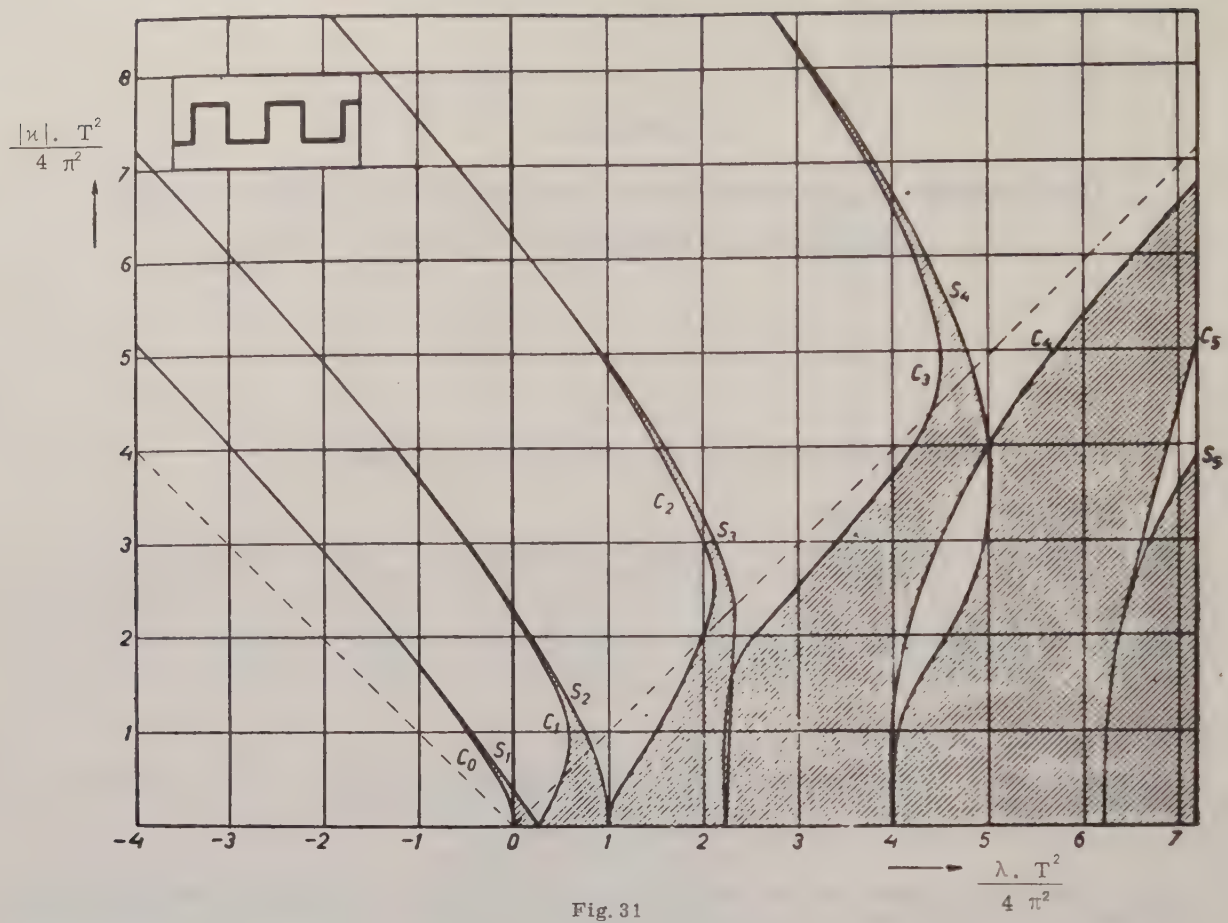


Fig. 31
(d'après la référence 3 ou 4)

II.1.3 - Calcul du diagramme à grande échelle.

Nous construisons le graphique en portant en abscisse la quantité $x = \frac{\lambda . T^2}{4\pi^2}$ et en ordonnée la quantité $y = \frac{|\varkappa|. T^2}{4\pi^2}$, car la condition de stabilité reste invariante par changement de signe de $\varkappa$. Les zones complètes s'obtiennent donc par une symétrie par rapport aux abscisses. En réalité nous nous sommes limités au premier quadrant ($\lambda > 0$) et aux trois premières zones.

Le calcul effectif des limites des zones est mal commode, la condition étant de forme assez compliquée. Pour les obtenir nous avons recherché les points d'intersection des zones avec les droites passant par l'origine. Pour cela nous avons choisi des rapports $\varkappa/\lambda$, de façon à avoir des racines carrées de carrés parfaits. On obtient ainsi des multiples d'un certain arc ou d'un certain argument, ce qui permet de simplifier un peu la résolution. Nous posons donc :

$$\begin{cases} \lambda + \varkappa = m^2 \\ \lambda - \varkappa = n^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 2\lambda = m^2 + n^2 \\ 2\varkappa = m^2 - n^2 \end{cases}$$

Parmi tous les rapports $\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, il faut choisir les valeurs permettant d'explorer tout le plan et qui ne mènent pas à des équations d'un ordre trop élevé. Nous avons adopté les valeurs suivantes pour $\frac{\varkappa}{\lambda}$:

∞	$-1 < \mathrm{ch}\ x.\ \cos x < 1.$	$x = \sqrt{\kappa}\ \frac{T}{2}$
845/123	$-1 < \cos\left(\frac{22}{13}x\right).\ \mathrm{ch}\left(\frac{19}{13}x\right) - \frac{123}{836}.\ \sin\left(\frac{22}{13}x\right).\ \mathrm{sh}\left(\frac{19}{13}x\right) < 1$	$x = \sqrt{\frac{\kappa}{10}}\ T$
13/5	$-1 < \cos 3x\ \mathrm{ch}\ 2x - \frac{5}{12}\sin 3x\ \mathrm{sh}\ 2x < 1$	$x = \sqrt{\frac{\kappa}{26}}\ T$
5/3	$-1 < \cos 2x\ \mathrm{ch}\ x - \frac{3}{4}\sin 2x\ \mathrm{sh}\ x < 1$	$x = \sqrt{\frac{\kappa}{10}}\ T$
3/4	$-1 < \cos 3x\ \mathrm{ch}\ x - \frac{3}{4}\sin 3x\ \mathrm{sh}\ x < 1$	$x = \sqrt{\frac{\kappa}{5}}\ \frac{T}{2}$
1	$-1 < \cos x - \frac{x}{2}\sin x < 1$	$x = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ T$
4/5	$-1 < \frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} < 1$	$x = \cos\sqrt{\frac{\lambda}{5}}\ T$
3/5	$-1 < \frac{x}{2}(9x^2 - 7) < 1$	$x = \cos\sqrt{\frac{\lambda}{10}}\ T$
5/13	$-1 < \frac{25}{24}.\ \cos 5x - \cos x < 1$	$x = \sqrt{\frac{\lambda}{26}}\ T$
0	$-1 < \cos x < 1$	$x = \sqrt{\lambda}\ T$

Le graphique correspondant a été reporté avec les graphiques universels du chapitre III correspondants aux différentes valeurs du produit $\alpha . T$ = cste. La précision est de quelques ‰.

Une partie du diagramme a été vérifiée expérimentalement avec le simulateur.

II.2 - VERIFICATION EXPERIMENTALE PAR LE SIMULATEUR.

II.2.1 - Equation du montage général.

Nous avons déjà donné l'équation générale du mouvement. Nous avons même indiqué les valeurs numériques des coefficients. Nous allons maintenant reprendre l'équation, en faisant intervenir la lampe électromètre, pour bien comprendre le fonctionnement du simulateur, ce qui nous permettra en passant de préciser l'influence de certains paramètres.

La lampe électromètre vue des points A et B se comporte comme un générateur de f.e.m. E_o et de résistance interne R_o lorsqu'elle débite un courant j dans une résistance R aux bornes A, B. Mais dans le cas du montage, le galvanomètre ne se comporte pas exactement comme une simple résistance.

Soient donc A et B, comme l'indique la figure 32, les bornes de sortie d'un générateur de f.e.m. E_o et de résistance interne R_o, débitant un courant j. Soient a et b les bornes de sortie du galvanomètre dont les bornes sont repérées une fois pour toutes. Supposons a et b reliées tout d'abord à A et B respectivement comme l'indique la figure 32. Le galvanomètre se conduit comme une résistance r parcourue par le courant j, mais en outre il oppose à la différence de potentiel E_B^A, une force contre électromotrice $|-NSH|.\ \vartheta' = +\Phi.\ \vartheta'$. Nous avons donc l'équation :

$$E_o - \Phi.\ \vartheta' = (R_o + r).\ j_b^a \quad (D)$$

la notation j_b^a indiquant que le courant j pénètre dans le galvanomètre par la borne a et en sort par la borne b, l'indice (D) indiquant la correspondance directe (a, A), (b, B) pour les bornes.

Inversons maintenant brutalement le sens des connexions, la borne a passant de la borne A à la borne B et la borne b passant de la borne B à la borne A. Nous avons maintenant le cas de la

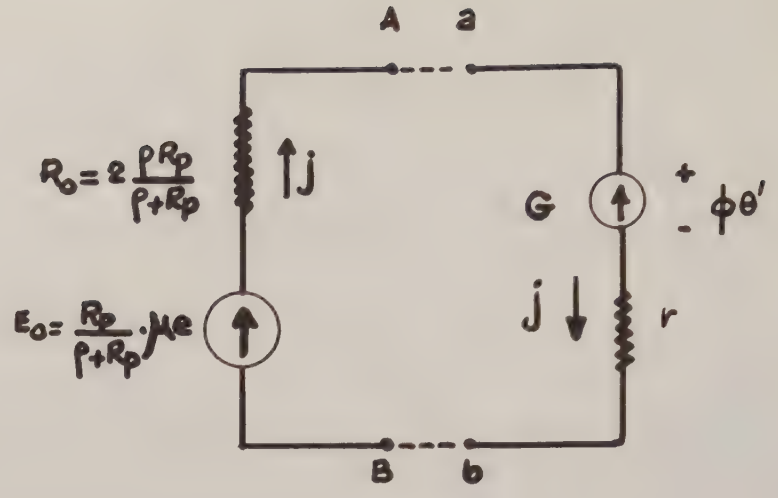


Fig. 32

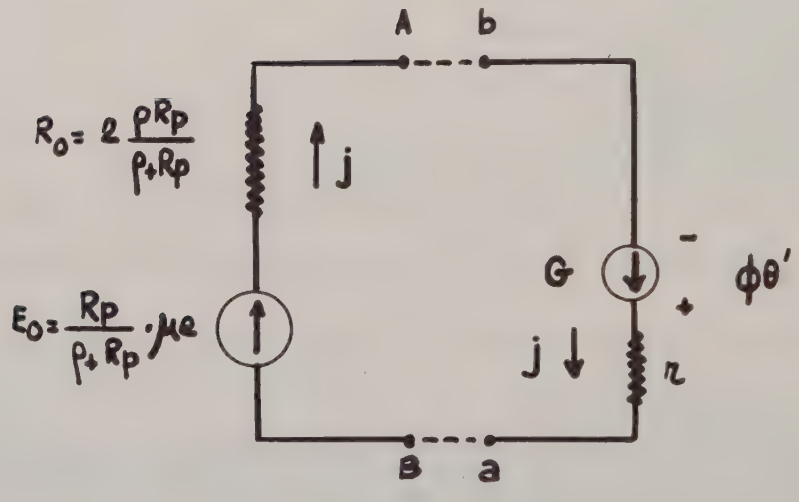


Fig. 33

figure 33. La force contre électromotrice du galvanomètre étant de la forme $-\frac{d\Phi}{dt} = -NSH.\vartheta' = -\Phi . \frac{d\vartheta}{dt}$ est une fonction continue, si nous admettons que les discontinuités n'existent qu'à partir des dérivés d'ordre $\geqslant 2$. Par conséquent le sens de cette forme contre électromotrice reste invariant par rapport aux bornes a, b. Donc cette force contre électromotrice s'ajoute maintenant à la tension E^A_B, tandis que le galvanomètre est maintenant parcouru par un courant j^a_b (C) selon l'équation :

$$E_o + \Phi . \vartheta' = (R_o + r) . j^b_a (C)$$

la notation j^b_a indiquant que le courant j pénètre dans le galvanomètre par la borne b et en sort par la borne a, contrairement au premier cas, et l'indice (C) indiquant la correspondance croisée (a, B), (b, A) pour les bornes.

Comme nous avons la relation : $j^b_a (C) = - j^a_b (C)$, nous pouvons écrire pour chacun des deux cas :

$$E_o - \Phi\,\vartheta' = (R_o + r).\ j_b^a \quad (D)$$
$$-E_o - \Phi\,\vartheta' = (R_o + r).\ j_b^a \quad (C)$$

Soit en employant la notation $\tilde{\tilde{S}}(t)$:

$$(R_o + r).\ j_b^a = E_o.\ \tilde{\tilde{S}}(t) - \Phi\,\vartheta'$$

qui précise la relation :

$$E - \Phi\,\vartheta' = ri$$

du système primitif

$$\begin{cases} I\vartheta'' + f\vartheta' + C\vartheta = i\Phi \\ E - \Phi\,\vartheta' = ri \\ E = A\vartheta \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi l'équation finale

$$\vartheta'' + \left(\frac{f}{I} + \frac{\Phi^2}{I(R_o + r)}\right).\ \vartheta' + \left(\frac{C}{I} - \frac{\Phi}{I}.\frac{R_p}{\rho + R_p}.\frac{\mu a}{R_o + r}.\tilde{\tilde{S}}(t)\right).\vartheta = 0$$

qui est de la forme :

$$\vartheta'' + (\alpha_m).\ \vartheta' + (\lambda + \varkappa.\ \tilde{\tilde{S}}).\ \vartheta = 0$$

Avant de terminer, il faut toutefois remarquer que nous avons négligé la self propre du cadre du galvanomètre, ramenant ainsi l'équation finale à une équation du deuxième ordre (en toute rigueur l'équation d'un galvanomètre est du troisième ordre).

II. 2. 2 - Principe des mesures avec le simulateur.

Il faut remarquer avant toutes choses, que nous introduisons une erreur systématique en négligeant l'amortissement minimum :

$$\alpha_{mini} = \frac{f}{i} + \frac{\Phi^2}{I\,(R_o + r)}$$

Nous montrerons dans le prochain chapitre qu'il faut considérer non pas la quantité $\lambda = \frac{C}{I}$ mais la quantité $l = \lambda - \frac{\alpha^2}{4}$.

Cela étant nous dirons qu'un régime est instable quand des élongations maxima successives, observées sur l'échelle de lecture, croîtront au cours du temps jusqu'à ce que la limite de linéarité de la cellule soit dépassée. Les amplitudes sont alors quelquefois bornées par la non linéarité. Mais bien souvent le spot sort des limites de la cathode. (Voir le chapitre IV).

On veut tracer les courbes expérimentales limitant les zones de stabilité pour un rapport $\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{\varkappa T^2}{4\pi^2}.\frac{4\pi^2}{\lambda T^2}$ donné.

Il suffit de faire varier lentement la fréquence et d'observer le spot de lecture. Le terme $\lambda = \frac{C}{I}$ étant déterminé une fois pour toutes par les constantes du galvanomètre, il faut obtenir $\varkappa$, c'est-à-dire l'amplitude de la fonction créneau. Cette amplitude $\varkappa$ se déduit de la période d'oscillation du galvanomètre primitivement lancé, la boucle du système asservi étant fermée sur le galvanomètre, mais les relais n'étant pas alimentés. Dans ces conditions deux cas sont à considérer :

a) $\varkappa < \lambda$. Les deux positions des relais donnent des oscillations de période T_1 et T_2. On a alors :

$$\begin{cases} \lambda + \varkappa_1 = 4\pi^2/(T_1)^2 \\ \lambda - \varkappa_2 = 4\pi^2/(T_2)^2 \end{cases}$$

Les valeurs obtenues doivent être égales. L'expérience montre que cela est d'autant moins bien vérifié que le rapport $\frac{\varkappa}{\lambda}$ se rapproche de l'unité (même en tenant compte de l'amortissement). Ceci se comprend en remarquant que la partie centrale de la courbe réponse E (ϑ) de la photodianode n'est linéaire qu'en moyenne. Il en résulte que la différence : $\lambda - \varkappa$ donne une valeur de plus en plus fluctuante, le mouvement est de moins en moins sinusoïdal et la période T ne peut donner de $\varkappa$ que des valeurs de plus en plus incertaines. On devra donc préférer la mesure donnant $\varkappa_1$:

$$\lambda + \varkappa_1 = 4\pi^2 / (T_1)^2$$

b) $\varkappa > \lambda$. Une position du relais donne une solution exponentielle. L'autre position donne une solution sinusoïdale, dont on mesurera la (pseudo)-période d'où $\varkappa_1$.

II. 2. 3 - Résultats des mesures.

Les résultats obtenus avec le simulateur sont indiqués figure 34. Comme on peut le voir, la courbe expérimentale épouse la courbe théorique, ce qui est satisfaisant. Les courbes ne coïncident toutefois pas, la courbe expérimentale mordant sur la zone instable théorique. Autrement dit les zones de stabilité théorique sont plus petites, ce qui semble normal puisque nous sommes obligés d'introduire un certain amortissement, inhérent au montage, faible mais présent malgré tout. La coïncidence courbe théorique-courbe expérimentale s'effectue à 4 % environ pour la partie de gauche (première zone stable) et à 2 % environ pour la partie de droite (deuxième zone stable). Pour la précision des mesures elles-mêmes, il semble que l'on puisse admettre 2 % à 1 % environ.

Il faut observer que la transition entre un mouvement stable et un mouvement instable est difficile à déterminer (particulièrement pour la partie gauche). En effet dans le cas d'un amortissement nul, le mouvement stable est un mouvement borné (et non pas amorti). Il est donc délicat de déterminer la transition, qui s'observe en notant le passage du mouvement simplement borné à un mouvement périodique fugitif puis à un mouvement oscillatoire exponentiel. Cette observation est d'autant plus délicate que pour les limites des zones, le mouvement périodique n'existe pas en réalité. Car si l'une des solutions est bien périodique, l'autre par contre est linéairement (et non pas exponentiellement) instable. Consulter par exemple Bertein (1). Dans le cas d'un amortissement le mouvement stable théorique est amorti et tend vers zéro. Le cas semble plus favorable. En réalité il n'en est pratiquement rien. En effet il subsiste toujours un bruit de fond, souvent perceptible à l'oeil. Ce bruit de fond est dû aux dissymétries du montage impossible à compenser avec les meilleurs réglages. En ce cas l'équation simulée s'écrit :

$$y'' + \alpha . y' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T)]\, y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \tilde{\tilde{S}}(T)$$

On peut alors montrer (voir le chapitre IV) que le mouvement ne peut rester amorti, son amplitude maxima croîssant d'une manière hyperbolique aux approches de la transition théorique.

Une mesure expérimentale nécessite donc d'abord une variation quasistatique de la fréquence pour éviter les transitoires perturbateurs, ce qui est relativement facile ; ensuite, avant chaque mesure, un réglage soigné au maximum de la dissymétrie du montage (en particulier par observation du bruit de fond).

Les résultats expérimentaux trouvés doivent donc être considérés comme satisfaisants, malgré la non-coïncidence des courbes théoriques et expérimentales.

Toutefois il ne nous a pas été possible de retrouver le point double théorique $y = 0$; $x = \frac{(1)^2}{4}$. Autrement dit nous n'avons plus séparation des zones stables (6).

Pour interpréter ces différences et particulièrement la non-existence du point double, nous avons étudié théoriquement et expérimentalement l'équation de Hill avec amortissement et c'est ce travail qui fait l'objet du chapitre suivant.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

(1) BERTEIN F. - Méthodes Théoriques Fondamentales. Tome III du cours 3ème cycle : "Théorie et Technique des Accélérateurs de Particules" (INSTN-SACLAY).

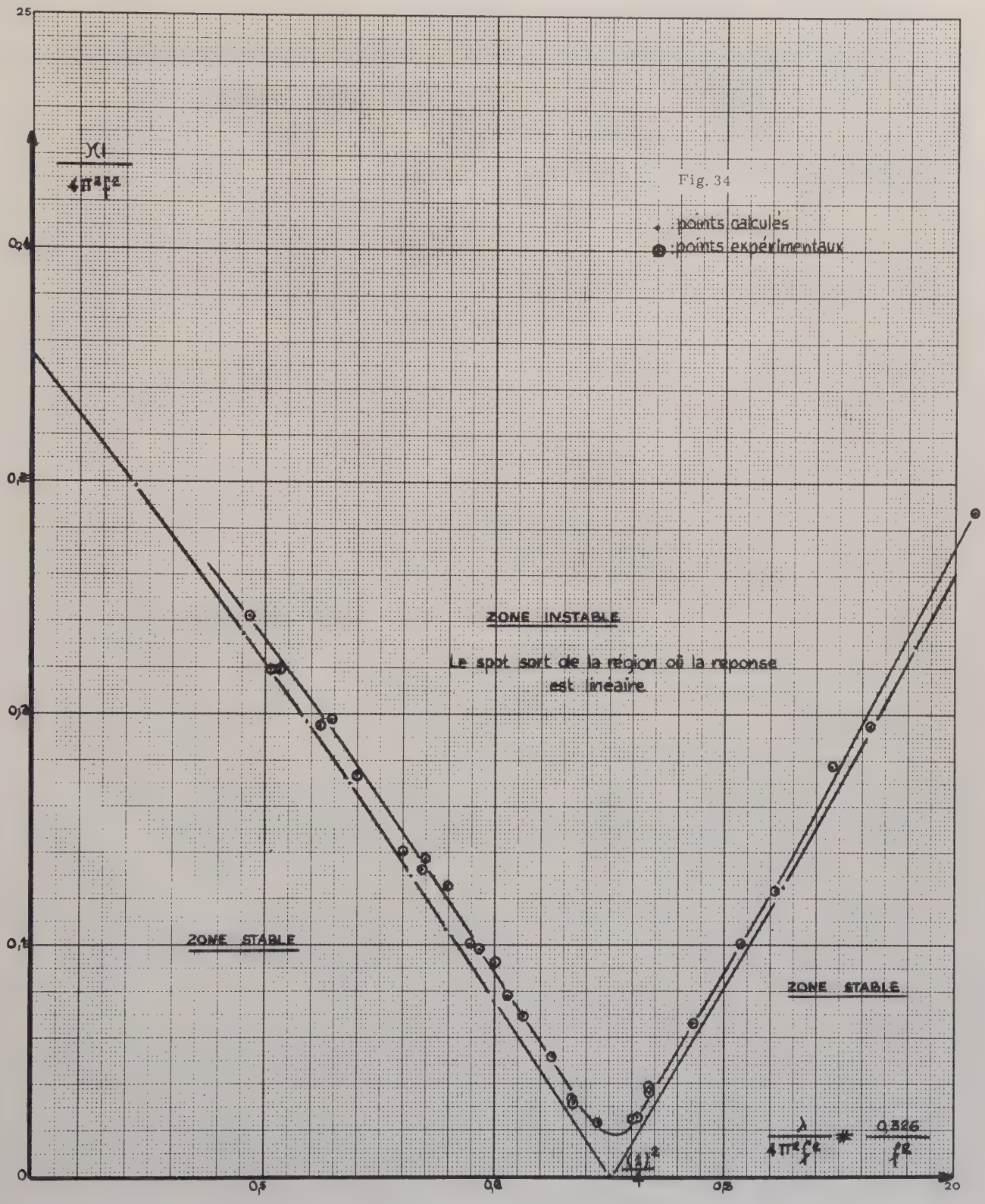


Fig. 34
points calculés
points expérimentaux
ZONE INSTABLE
Le spot sort de la région où la réponse est linéaire
ZONE STABLE
ZONE STABLE
25
0,2
0,1
0
0,5
0,8
1
0,3
20

(2) VOGEL Th. - Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique (CNRS, Paris 1953).

(3) VAN DER POL and STRUTT - Philos. Mag. V, 1928, p. 23.

(4) STRUTT - Lamesche, Mathieusche und verwandte Funktionen (Ergebnisse der augewandten Mathemstik - Springer Verlag, 1932), p. 40.

(5) BRILLOUIN et PARODI - Propagation des ondes dans les milieux périodiques.

(6) VALAT J. - CRAS, 244, Mai 1957, 2 462 - 2 465.

(7) MEISSNER - Schweitzerische Bauzeitung, 72, 1918.

CHAPITRE III

DIAGRAMME DE STABILITÉ DE L'ÉQUATION AVEC AMORTISSEMENT ET A CRÉNEAUX SYMÉTRIQUES : $y'' + \alpha y' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(t)] . y = 0$

III.1 - ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DE STABILITE.

III.1.1 - Mode d'influence de l'amortissement.

Nous sommes donc conduits à étudier le diagramme de stabilité de l'équation à créneaux symétriques :

$$y'' + \alpha y' + \left[\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T)\right] y = 0$$

Posons suivant une transformation classique :

$$y = u(t) . \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t\right)$$

Nous nous ramenons ainsi à l'équation de Hill :

$$u'' + \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4} + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T)\right) u = 0$$

pour laquelle le théorème de Floquet donne une solution particulière :

$$u = A . \exp(\mu t) . \Phi(t)$$

$\Phi(t)$ étant une fonction périodique de période T. D'où :

$$y = A . \exp\left(\left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right) t\right) . \Phi(t)$$

L'amortissement modifie donc de deux façons les zones de stabilité obtenues pour $\alpha = 0$. D'une part il modifie le coefficient λ qui devient $\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right)$ et d'autre part il change l'exposant caractéristique μ qui devient $\left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)$.

III.1.2 - Etablissement des conditions de stabilité.

Considérons l'équation à coefficients constants :

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

Sa solution générale s'écrit en posant : $\omega^2 = \beta - \frac{\alpha^2}{4}$

$$\begin{Vmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{Vmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) . \begin{Vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t - \frac{\alpha}{2} \cos \omega t & \omega \cos \omega t - \frac{\alpha}{2} \sin \omega t \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$$

d'où en inversant la matrice :

$$\begin{Vmatrix} A \\ \\ B \end{Vmatrix} = \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \cdot \begin{Vmatrix} \left(\cos \omega t - \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \sin \omega t\right) & \left(-\frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t\right) \\ \\ \left(\sin \omega t + \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \cos \omega t\right) & \left(\frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y\ (t) \\ \\ y'\ (t) \end{Vmatrix}$$

La relation de transfert entre les quantités au temps t et les quantités au temps $t + \tau$ s'écrit donc, tous calculs faits :

$$\begin{Vmatrix} y\ (t+\tau) \\ \\ y'\ (t+\tau) \end{Vmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right) \cdot \begin{Vmatrix} \left(\cos \omega\tau + \frac{\alpha}{2\omega} \sin \omega\tau\right) & \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega\tau\right) \\ \\ -\left(\omega + \frac{\alpha^2}{4\omega}\right) \cdot \sin \omega\tau & \left(\cos \omega\tau - \frac{\alpha}{2\omega} \sin \omega\tau\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y\ (t) \\ \\ y'\ (t) \end{Vmatrix}$$

soit pour abréger :

$$\begin{Vmatrix} y\ (t+\tau) \\ y'\ (t+\tau) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M\ (\omega\tau) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y\ (t) \\ y'\ (t) \end{Vmatrix}$$

Considérons maintenant l'équation de Hill :

$$y'' + \alpha y' + (\lambda + \varkappa \cdot \tilde{\tilde{S}}(T) \cdot y = 0$$

où nous supposons le créneau symétrique, c'est-à-dire $T_1 = T_2 = T/2$. Prenons une origine des temps telle que le début du demi-créneau positif soit en t_o, puis posons :

$$\begin{cases} (a)^2 = \lambda - \frac{\alpha^2}{4} + \varkappa \\ (b)^2 = \lambda - \frac{\alpha^2}{4} - \varkappa \end{cases}$$

Nous obtenons alors la relation de transfert entre les quantités séparées par une durée $\frac{T}{2} + \tau$:

$$\begin{Vmatrix} y\ (t_o + T/2 + \tau) \\ \\ y'\ (t_o + T/2 + \tau) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M\ (b\tau) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y\ (t_o) \\ \\ y'\ (t_o) \end{Vmatrix}$$

où la matrice :

$$\begin{Vmatrix} M\left(b\tau\ ;\ \frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M\ (b\tau) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix}$$

a pour composantes les valeurs :

$$M_{11} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T}{2} + \tau\right)\right) \cdot \left\{ \cos b\tau \left[\cos \frac{aT}{2} + \frac{\alpha}{2a} \sin \frac{aT}{2}\right] + \sin b\tau \left[\frac{\alpha}{2b} \cos \frac{aT}{2} - \frac{a}{b} \sin \frac{aT}{2}\right] \right\}$$

$$M_{12} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T}{2} + \tau\right)\right) \cdot \left\{ \cos b\tau \left[\frac{1}{a} \sin \frac{aT}{2}\right] + \sin b\tau \left[\frac{1}{b} \cos \frac{aT}{2}\right] \right\}$$

$$M_{21} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T}{2}+\tau\right)\right).\left\{-\cos b\tau\left[a+\frac{\alpha^2}{4a}\right]\sin\frac{aT}{2}+\sin b\tau\left[-\left(b+\frac{\alpha^2}{4b}\right)\cos\frac{aT}{2}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\sin\frac{aT}{2}\right]\right\}$$

$$M_{22} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T}{2}+\tau\right)\right).\left\{\cos b\tau\left[\cos\frac{aT}{2}-\frac{\alpha}{2a}\sin\frac{aT}{2}\right]+\sin b\tau\left[-\frac{b}{a}\sin\frac{aT}{2}-\frac{\alpha}{2b}\cos\frac{aT}{2}\right]\right\}$$

Cette forme nous permettra dans un prochain chapitre (V) d'étendre la condition de stabilité aux créneaux dissymétriques ($T_1 \neq T_2$). De plus elle nous permet de nous rendre compte que :

$$M_{21} = \frac{d}{d\tau}(M_{11}) \text{ et } M_{22} = \frac{d}{d\tau}(M_{12})$$

ce qui va nous faciliter plus loin le calcul du déterminant (Wronskien) de la matrice de transfert M (T/2 + T/2) entre les instants t_o et $t_o + T$.

Pour trouver maintenant les conditions de stabilité, remarquons qu'une solution particulière de l'équation de Hill du simulateur, étant de la forme $y = A \exp(mt).\Phi(t)$, devient au bout d'une période :

$$y(t+T) = A.\exp(m(t+T)).\Phi(t+T) = \exp(mT).\ y(t) = r.\ y(t)$$

Nous aurons donc la relation matricielle suivante :

$$\begin{Vmatrix} y(t_o+T) \\ y'(t_o+T) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix}$$

D'où le système homogène :

$$\left\{ \begin{Vmatrix} M \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{Vmatrix} \right\} . \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix} = 0$$

Par suite les valeurs propres r_i sont données par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} (M_{11}-r) & M_{12} \\ M_{21} & (M_{22}-r) \end{vmatrix} = 0$$

La solution sera stable si les valeurs propres de la matrice $\|M\|$ sont, en module, inférieures ou égales à l'unité. L'équation aux valeurs propres est de la forme :

$$r^2 - tr + \delta = 0$$

où t est la trace $t = M_{11} + M_{22}$ de la matrice générale $\|M\|$, qui s'écrit après simplification :

$$t = \exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right).\left\{2.\cos\frac{aT}{2}\cos\frac{bT}{2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).\sin\frac{aT}{2}\sin\frac{bT}{2}\right)\right\}$$

Les quantités a et b peuvent devenir imaginaires pures. Toutefois la trace t reste toujours réelle. La quantité δ est le déterminant de la matrice générale $\|M\|$. On peut le calculer directement, mais les calculs sont pénibles. Il est plus simple de remarquer que δ, Wronskien de l'équation linéaire $\left(M_{21} = \frac{d}{d\tau}M_{11} \text{ et } M_{22} = \frac{d}{d\tau}M_{12}\right)$ peut s'écrire :

$$\delta = \delta_o .\ \exp\left(-\int_o^T \alpha\, dt\right) = \exp(-\alpha T)$$

L'équation s'explicite alors sous la forme :

$$r^2 - r.\exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right).\left\{2\cos\frac{aT}{2}\cos\frac{bT}{2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\sin\frac{aT}{2}\sin\frac{bT}{2}\right\}+\exp(-\alpha T) = 0$$

Les zones de stabilité seront définies par :

$$|r| < 1$$

Les résultats de la discussion dépendent du signe de α.

Pour $\alpha > 0$, nous avons trois cas :

1/ $|t| > 1 + e^{-\alpha T}$: Il y a instabilité, l'amplitude des oscillations croîtra et atteindra la zone de non linéarité de la cellule.

2/ $|t| = 1 + e^{-\alpha T}$: Il existe une solution périodique vers laquelle tend la solution générale, car l'autre solution s'évanouit.

3/ $|t| < 1 + e^{-\alpha T}$: Il y a toujours stabilité, que les valeurs propres soient réelles ou complexes. Les solutions sont amorties exponentiellement.

En résumé les zones de stabilité sont déterminées par la condition :

$$\left| 2. \cos \frac{aT}{2} \cos \frac{bT}{2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right). \sin \frac{aT}{2} \sin \frac{bT}{2} \right| \leqslant 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha T}{2} \right)$$

Cette condition généralise la condition de Meissner, Strutt et de Van der Pol obtenue précédemment, que l'on retrouve en faisant $\alpha = 0$ (1).

Pour $\alpha < 0$, il y a toujours instabilité.

En effet si les valeurs propres sont réelles, il y en a au moins une de module supérieur à l'unité, puisque pour $r = \sqrt{\delta}$ point d'intersection avec l'axe des r de la parabole $y = \delta - r^2$, lieu des minima des paraboles $y = r^2 - tr + \delta$, nous avons :

$$\sqrt{\delta} = \exp \left(- \frac{\alpha T}{2} \right) = \exp \left(+ |\alpha| \frac{T}{2} \right) > 1$$

Si les valeurs propres sont complexes nous avons :

$$r = \frac{t \pm j. \sqrt{4\delta - t^2}}{2}$$

d'où

$$|r| = \frac{t^2 + 4\delta - t^2}{4} = \delta = \exp (+|\alpha| . T) > 1$$

Il y a encore instabilité.

La figure 35 résume cette discussion. Remarquons l'existence d'une racine double pour $r = \exp \left(- \frac{\alpha T}{2} \right)$. Par suite, pour $\alpha > 0$, l'une des solutions sera amortie en $\exp \left(- \frac{\alpha T}{2} \right)$. Par contre, l'autre solution, stable en principe puisque de la forme $(at + b). \Psi(t). \exp \left(- \frac{\alpha t}{2} \right)$ le sera d'autant moins que α sera faible et le bruit de fond de l'appareil important. Physiquement il pourra y avoir des lignes de résonnance.

Pour terminer, signalons la disparition des points doubles de l'axe des abscisses $\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{T^2}{4\pi^2}$.

III. 2 - CALCUL D'UN DIAGRAMME UNIVERSEL αT = Cste.

Nous avons quatre paramètres λ, μ, α, T. Si nous voulons obtenir un graphique qui soit d'une valeur universelle, il est nécessaire de nous donner une relation supplémentaire de façon à obtenir une représentation cotée. Nous avons choisi de prendre αT = cste, qui semble simplifier au mieux les calculs.

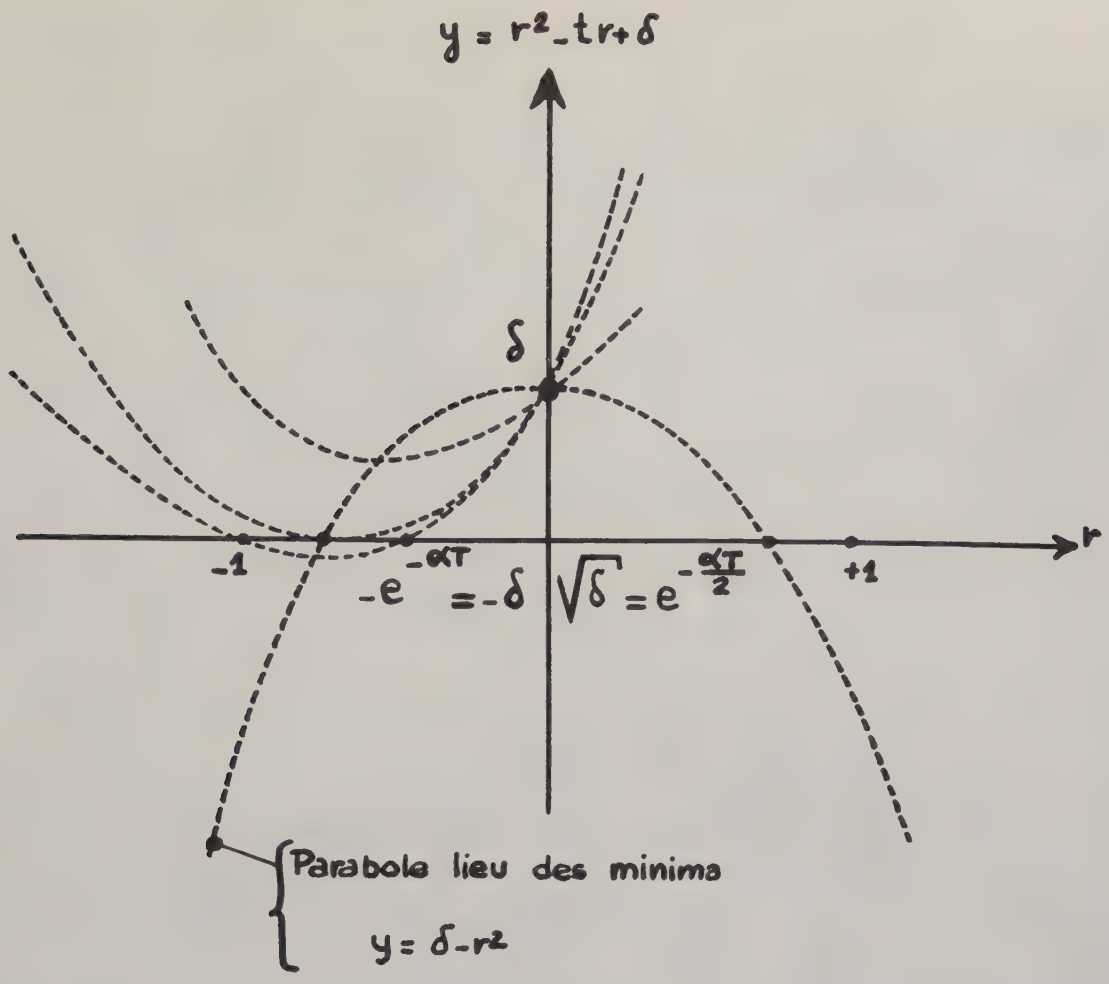


Fig. 35

Nous construisons le graphique en portant en ordonnée la quantité $y = \frac{\varkappa . T^2}{4\pi^2}$ mais cette fois ci la quantité $x = \frac{l . T^2}{4\pi^2}$ en abscisse, $\left(l = \lambda - \frac{\alpha^2}{4}, \text{ et non pas } \lambda \right)$. Nous nous sommes encore limités au premier quadrant ($4\lambda > \alpha^2$) et aux premières zones.

Le calcul effectif s'obtient de la même manière que pour $\alpha = 0$ en recherchant les points d'intersection des courbes de transition αT = cste avec les droites $y = \frac{\varkappa}{l} x$, passant par l'origine . Nous avons choisi pour $\frac{\varkappa}{l}$ les mêmes valeurs que précédemment soit :

$$\frac{\varkappa}{l} = \infty \; ; \frac{845}{123} \; ; \; 13/5 \; ; \; 5/3 \; ; \; 5/4 \; ; \; 1 \; ; \; 4/5 \; ; \; 3/5 \; ; \; 5/13 \; ; \; 0$$

de manière à obtenir comme déjà dit des racines carrées de carrés parfaits donc des arcs (ou des arguments) multiples. D'autre part pour αT = cste, nous nous sommes limités aux valeurs suivantes :

$$\alpha T = 0 \; ; \; 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 5 \; ; \; 6 \; ; \; 7$$

Pour préciser l'allure de certaines branches, nous avons recherché l'intersection avec les deux droites $y = + mx + n$, où $m = - 1$, tandis que $n = \left(\frac{11}{6}\right)^2$ et $(2)^2$. Nous avons également recherché

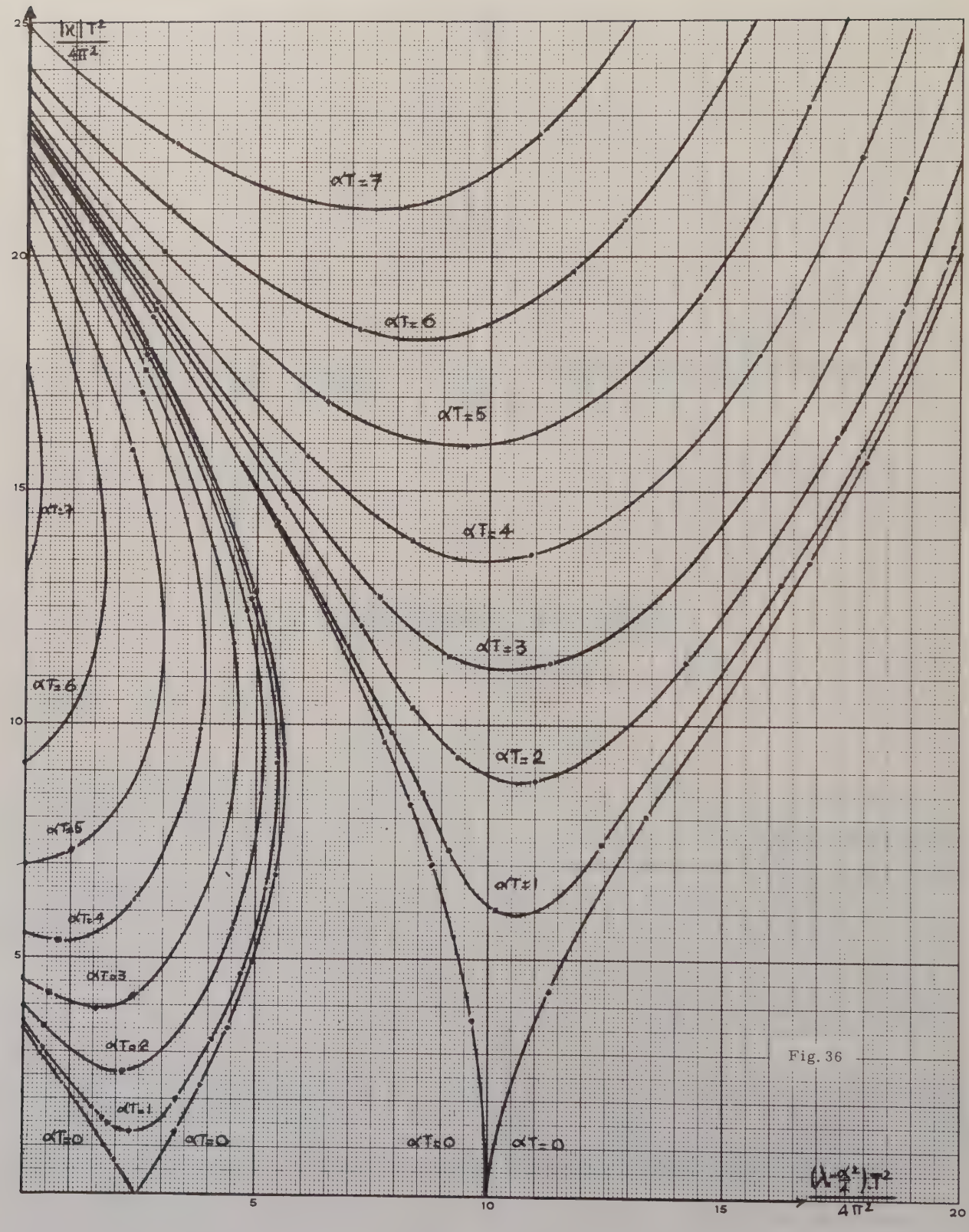

$\frac{|\chi|T^2}{4\pi^2}$
$\alpha T=7$
$\alpha T=6$
$\alpha T=5$
$\alpha T=4$
$\alpha T=3$
$\alpha T=2$
$\alpha T=1$
$\alpha T=0$
$\alpha T=7$
$\alpha T=6$
$\alpha T=5$
$\alpha T=4$
$\alpha T=3$
$\alpha T=2$
$\alpha T=1$
$\alpha T=0$
$\alpha T=0$
$\alpha T=0$
$\frac{(\lambda-\frac{\alpha^2}{4})T^2}{4\pi^2}$
5
10
15
20
25

Fig. 36

les points d'intersection avec la verticale x = 1,1. Nous avons calculé en tout les coordonnées de 135 points différents. La figure 36 reproduit les zones de stabilité du graphique universel à αT = cste = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7. La précision des valeurs calculées est de quelques ‰ (1).

Nous constatons donc bien d'une part l'élargissement des zones de stabilité et d'autre part la suppression des points doubles, ce qui peut d'ailleurs se voir sur les conditions de stabilité.

Toutefois la vérification expérimentale des diagrammes universels à αT = cste est malaisée à obtenir avec un appareil comme le simulateur (nous l'avons cependant effectuée plus tard avec un calculateur universel - voir le chapitre V).

Par contre elle se fait tout naturellement à α = cste : il suffit de mettre en parallèle avec le galvanomètre une résistance judicieusement choisie, comme il apparaît sur l'équation générale du montage avec la lampe électromètre.

En effet nous avons un générateur de f.e.m. $\# \frac{R_p}{\rho + R_p} . \mu A \vartheta$ et de résistance interne équivalente $\# 2. \frac{\rho . R_p}{\rho + R_p} = R_o$. D'où, comme nous le verrons plus loin, l'équation générale du montage :

$$\vartheta'' + \left\{ \frac{f}{I} + \frac{\Phi^2}{I} \left(\frac{1}{r + \frac{R_o R}{R_o + R}} \right) \right\} . \vartheta' + \left\{ \frac{C}{I} - \frac{\Phi}{I} . \frac{R_p}{\rho + R_p} . \frac{\mu A}{1 + \frac{R_o}{R}} . \frac{1}{r + \frac{R_o R}{R_o + R}} . \tilde{\tilde{S}} \right\} . \vartheta = 0$$

ρ étant la résistance interne, R_p la résistance des plaques, μ le coefficient d'amplification et R la résistance aux bornes.

III.3 - CALCUL D'UN DIAGRAMME PARTICULIER α = cste.

Il est impossible de donner un graphique universel à α = cste. Nous avons en effet deux paramètres "naturels" λ et α et deux paramètres "extérieurs" $\varkappa$ et T, soit quatre paramètres en tout. Il est donc nécessaire de s'imposer une relation pour obtenir une représentation plane cotée (soit par exemple αT = cste). Ou bien alors il faut se fixer un paramètre. Il semble particulièrement commode de garder λ constante, puisque cette quantité représente la constante de torsion du galvanomètre et de faire varier, dans l'ordre α, $\varkappa$, T, les autres paramètres. Les nouvelles zones ne sont donc valables que pour une valeur donnée de λ.

Ces graphiques α = cste diffèrent des graphiques αT = cste principalement par leurs points d'intersection avec l'axe vertical $\frac{\varkappa . T^2}{4\pi^2}$. Toutes les courbes α = cste passent par les points d'intersection de cet axe avec les branches de la courbe α = 0.

Nous avons fait le calcul pour λ = 13,65 correspondant au galvanomètre du simulateur et pour les valeurs α = 1, α = 1,5, α = 2. Nous avons calculé les coordonnées de 30 nouveaux points. La figure 37 reproduit les zones de stabilité du diagramme. C'est ce diagramme que nous nous sommes proposés de vérifier expérimentalement par le simulateur, avec une résistance en parallèle pour introduire un amortissement constant.

III.4 - ETUDE GENERALE DU MONTAGE AVEC AMORTISSEMENT QUELCONQUE.

Nous avons déjà établi l'équation générale du montage avec son amortissement propre c'est-à-dire avec le plus faible amortissement possible. Il nous faut maintenant étudier l'influence de la mise en parallèle d'une résistance pure R avec le galvanomètre. De cette manière il nous sera possible en choisissant convenablement R d'imposer le coefficient d'amortissement α de l'équation :

$$y'' + \alpha y' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}] . y = 0$$

et de vérifier expérimentalement son influence sur les zones de stabilité.

Reprenons à nouveau le schéma d'un générateur de f.e.m. E_o et de résistance interne R_o débitant un courant j à partir des bornes A et B sur une charge constituée par une résistance R en parallèle avec un galvanomètre. Soient à nouveau a et b des bornes repérées une fois pour toutes sur le galvanomètre et de même soient α et β les bornes repérées sur la résistance R en parallèle.

$\mu T^2/4\pi^2$
$(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}) T^2/4\pi^2$
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
1/4
0,3
0,4
$\alpha = 2$
$\alpha = 1,5$
$\alpha = 1$
$\alpha = 0$
$\alpha = 0$

Fig. 37

Pour la suite nous pouvons considérer que le crénelage s'effectue de deux manières différentes : ou bien le crénelage inverse le couplage (αA), (βB) et le transforme en (αB), (βA) et vice versa , de même qu'il inverse le couplage (aA), (bB) en (bA), (aB) et vice versa ; ou bien le crénelage n'effectue pas l'inversion du couplage (αA), (βB) et (βA), (αB), et croise simplement le couplage du galvanomètre (aA), (bB) en (aB), (bA). Les deux montages peuvent être physiquement réalisés. Dans le premier cas, la résistance R est en amont des relais, dans le deuxième cas elle est en aval, directement aux bornes du galvanomètre. Si le crénelage est correct le résultat est le même. Dans la suite du raisonnement nous supposons, pour raison de simplicité, les bornes α et β couplées invariablement aux bornes A et B, soit : (αA), (βB).

Le générateur débite un courant j, la résistance R étant parcourue par un courant I et le galvanomètre par un courant i. Nous avons donc dans le cas (aA), (bB) de la figure 38 :

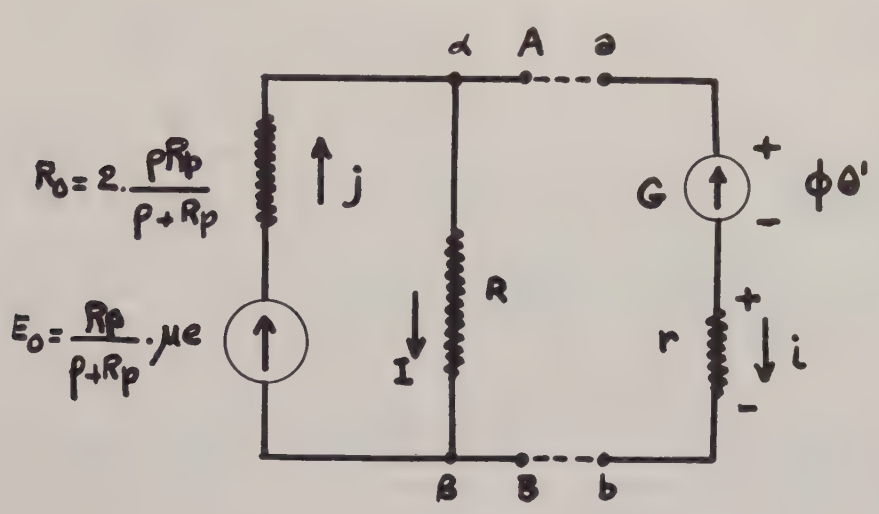


Fig. 38

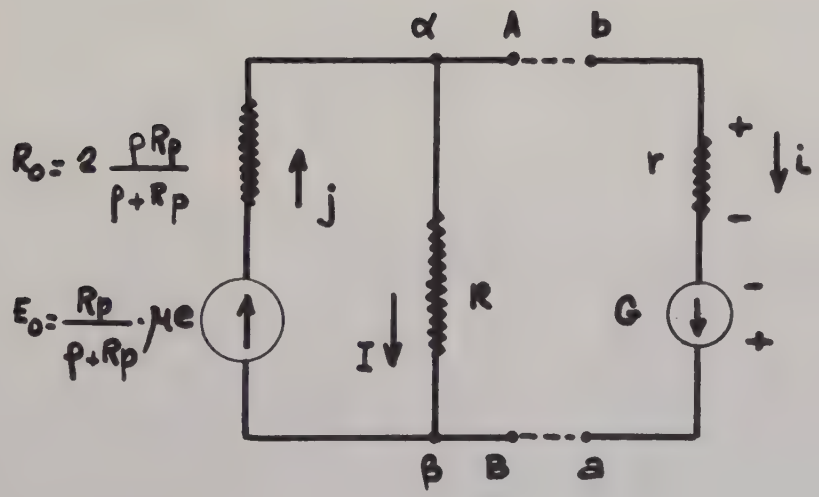


Fig. 39

$$E_o - R_o . j = R.I = \Phi . \vartheta' + r . i_b^a (D)$$

la notation i_b^a signifiant que le courant pénètre par la borne a dans le galvanomètre et en sort par la borne b, l'indice (D) indiquant la correspondance directe (aA), (bB) pour les bornes. Nous avons donc :

$$j = I + i_b^a (D) = \frac{\Phi}{R} \vartheta' + \frac{r}{R} i_b^a (D) + i_b^a (D) = \frac{\Phi . \vartheta'}{R} + \left(\frac{r + R}{R}\right) . i_b^a (D)$$

et

$$E_o = \Phi . \vartheta' + r . i_b^a (D) + R_o \left\{ \frac{\Phi . \vartheta'}{R} + \left(\frac{r + R}{R}\right) . i_b^a (D) \right\}$$

soit enfin

$$E_o - \left(\frac{R + R_o}{R}\right) . \Phi . \vartheta' = \left\{ (r + R) \frac{R_o}{R} + r \right\} . \left\{ i_b^a (D) \right\}$$

Inversons maintenant brutalement le sens des connexions, la borne a passant de la borne A à la borne B et la borne b passant de la borne B à la borne A. Nous avons maintenant le cas de la figure 39. La force contre électromotrice du galvanomètre étant de la forme $- \frac{d\Phi}{dt} = - \Phi . \vartheta'$ est une fonction continue, les discontinuités n'existant qu'à partir des dérivés d'ordre $\geq$ à 2. Par conséquent le sens de cette force contre électromotrice reste invariant par rapport aux bornes a, b. Donc cette force contre électromotrice s'ajoute maintenant à la tension E_{β}^{A}, au lieu de s'y opposer, tandis que le galvanomètre est parcouru par un courant $i_a^b (C)$. Nous avons d'après la figure les relations suivantes :

$$E_o - R_o . j = R . I = - \Phi . \vartheta' + r . i_a^b (C)$$

la notation $i_a^b (C)$ signifiant que le courant pénètre par la borne a dans le galvanomètre et en sort par la borne b, l'indice (C) indiquant la correspondance croisée (aB), (bA) pour les bornes. Nous avons donc :

$$j = I + i_a^b (C) = - \frac{\Phi . \vartheta'}{R} + \frac{r}{R} i_a^b (C) + i_a^b (C) = - \frac{\Phi . \vartheta'}{R} + \left(\frac{r + R}{R}\right) . i_a^b (C)$$

et

$$E_o = - \Phi . \vartheta' + r . i_a^b (C) + R_o . \left\{ - \frac{\Phi . \vartheta'}{R} + \left(\frac{r + R}{R}\right) . i_a^b (C) \right\}$$

soit enfin :

$$E_o + \left(\frac{R + R_o}{R}\right) . \Phi . \vartheta' = \left\{ (r + R) . \frac{R_o}{R} + r \right\} . \left\{ i_a^b (C) \right\}$$

Comme nous avons :

$$i_a^b (C) = - i_b^a (C)$$

nous pouvons finalement écrire pour chacun des deux cas :

$$E_o - \left(\frac{R + R_o}{R}\right) . \Phi . \vartheta' = \left\{ (r + R) . \frac{R_o}{R} + r \right\} . \left\{ i_b^a (D) \right\}$$

$$- E_o - \left(\frac{R + R_o}{R}\right) . \Phi . \vartheta' = \left\{ (r + R) . \frac{R_o}{R} + r \right\} . \left\{ i_b^a (C) \right\}$$

soit en employant la notation $\overset{\frown}{S}(T)$, la relation :

$$\left\{ (r + R) . \frac{R_o}{R} + r \right\} . \left\{ i_b^a \right\} = E_o . \overset{\frown}{S}(t) - \left(\frac{R + R_o}{R}\right) . \Phi . \vartheta'$$

qui précise la relation :

$$E - \Phi\vartheta' = ri$$

du système primitif :

$$\begin{cases} I\vartheta'' + f\vartheta' + c\vartheta = \Phi i \\ E - \Phi\vartheta' = ri \\ E = A\vartheta \end{cases}$$

En nous rappelant que :

$$E_o = \frac{R_p}{\rho + R_p} \cdot \mu e \qquad R_o = 2. \frac{\rho R_p}{\rho + R_p}$$

nous obtenons ainsi l'équation finale suivante :

$$\vartheta'' + \left\{ \frac{f}{I} + \frac{\Phi^2}{I} \cdot \frac{1 + \frac{R_o}{R}}{r\left(1 + \frac{R_o}{R}\right) + R_o} \right\} \cdot \vartheta' + \left\{ \frac{C}{I} + \frac{\Phi}{I} \cdot \frac{R_o}{\rho + R_p} \cdot \frac{\mu a}{r\left(1 + \frac{R_o}{R}\right) + R_o} \cdot \tilde{\tilde{S}} \right\} \cdot \vartheta = 0$$

ou bien :

$$\vartheta'' + \left\{ \frac{f}{I} + \frac{\Phi^2}{I} \cdot \frac{1}{r + \frac{R_o R}{R + R_o}} \right\} \cdot \vartheta' + \left\{ \frac{C}{I} + \frac{\Phi}{I} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho}{R_p}} \cdot \frac{1}{r + \frac{R_o R}{R + R_o}} \cdot \frac{\mu a}{1 + \frac{R_o}{R}} \cdot \tilde{\tilde{S}} \right\} \cdot \vartheta = 0$$

qui est de la forme :

$$\vartheta'' + \alpha\vartheta' + (\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}) . \vartheta = 0$$

Pour $R = \infty$ nous retrouvons l'amortissement minimum. Nous avons alors :

$$\alpha_{mini} = \frac{\Phi^2}{I} \cdot \left(\frac{1}{r + R_o}\right) + \frac{f}{I}$$

et

$$\varkappa_\infty = \frac{\Phi}{I} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho}{R_p}} \cdot \frac{1}{r + R_o} \cdot \mu a$$

Donc pour une résistance R en parallèle :

$$\varkappa_R = \frac{r + R_o}{r\left(1 + \frac{R_o}{R}\right) + R_o} . \varkappa_\infty$$

relation dont nous nous servirons plus loin.

III. 5 - VERIFICATION EXPERIMENTALE DU DIAGRAMME α = cste.

Les valeurs α s'obtiennent par mise en parallèle d'une résistance R avec le galvanomètre (r) et la lampe électromètre (R_o). Cette résistance est donnée par la formule : $\alpha . I = f + \frac{\Phi^2}{r + \frac{R_o R}{R + R_o}}$.
Or les quantités f et Φ^2 s'obtiennent par des mesures d'amortissement et de résistance critique. Ces quantités nécessitent un grand nombre de mesures pour être obtenues avec quelque precision.

Nous avons effectué la vérification expérimentale pour $\alpha = 1$. Plus tard nous avons repris les mesures pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ (voir le chapitre VI). Les résultats obtenus pour $\alpha = 1$ sont indiqués figure 40. La courbe expérimentale possède à peu près la même allure mais ne coïncide pas avec la courbe théorique. En particulier la courbe expérimentale ne semble pas du tout vouloir passer par le point d'intersection $\left(x = \frac{l . T^2}{4\pi^2} = 0 \; ; \; y = \frac{\varkappa . T^2}{4\pi^2} \# 0,356\right)$ de la courbe $\alpha T = 0 = \alpha$ avec l'axe des y. Ce point est en effet un point multiple commun à toutes les courbes α = cste. La courbe

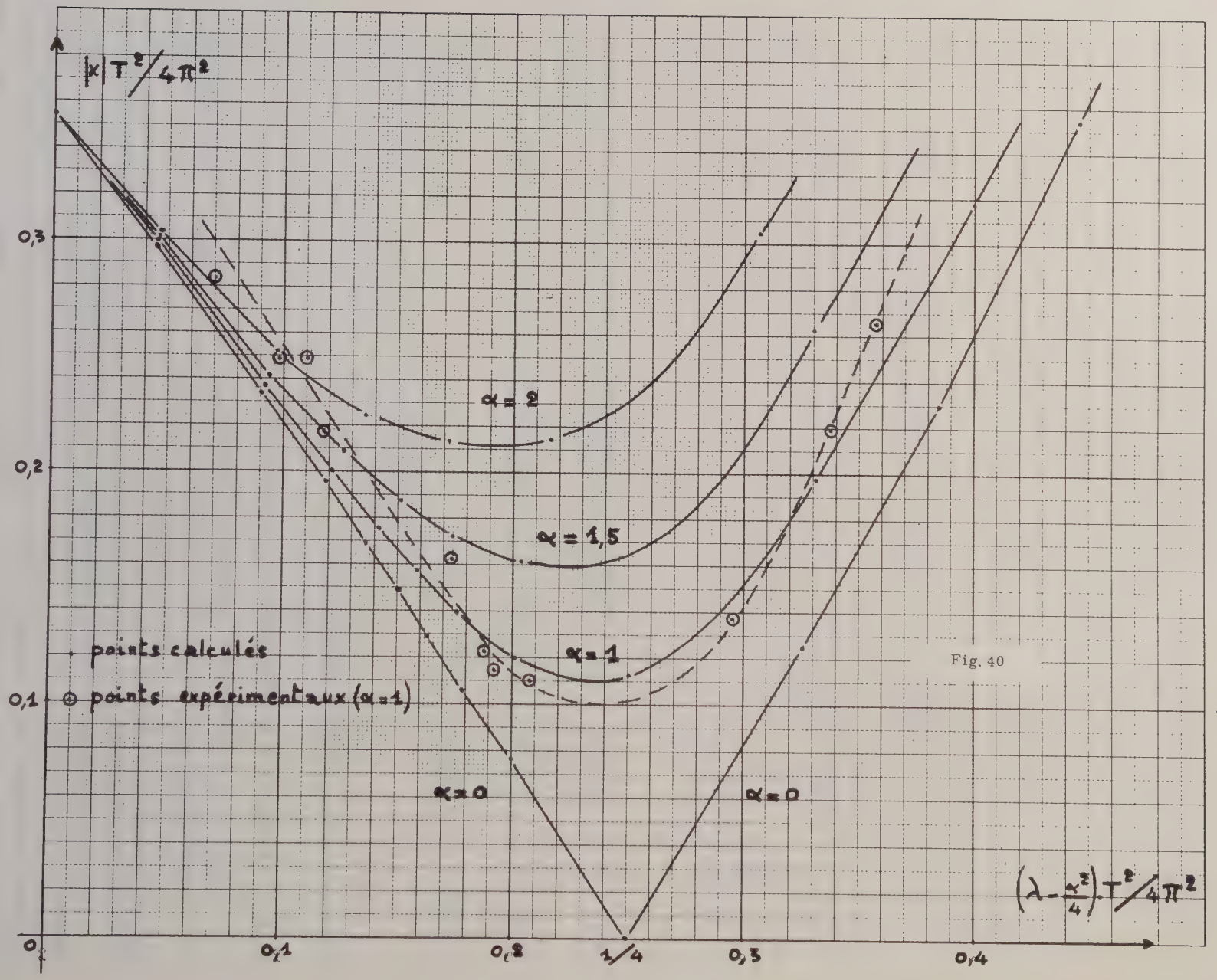

$|\kappa| T^2/4\pi^2$
0,3
0,2
0,1
0
$\alpha = 2$
$\alpha = 1,5$
$\alpha = 1$
$\alpha = 0$
$\alpha = 0$
· points calculés
⊙ points expérimentaux ($\alpha = 1$)
0,1
0,2
1/4
0,3
0,4
$\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right) T^2/4\pi^2$

Fig. 40

expérimentale semble vouloir passer plus haut vers le point ($x = 0$; $y \sim 0,38$) approximativement. Une incertitude sur la résistance en parallèle ne saurait influer de cette manière sur la courbe expérimentale. En somme la vérification expérimentale n'est pas très bonne. Cependant le fait essentiel de la non existence du point double sur l'axe des x est bien vérifié.

Nous avons pensé que nous pouvions peut-être attribuer cette non-coïncidence des courbes aux dissymétries du montage. Nous avons donc étudié quelle pouvait être l'influence de ces dernières sur la stabilité du mouvement. C'est ce que nous allons maintenant préciser.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

(1) VALAT J. - CRAS, 244, Juin 1957, 3 017-3 020.

CHAPITRE IV

STABILITÉ DU SIMULATEUR SOUMIS A UNE PERTURBATION CRÉNELÉE DUE AUX DISSYMÉTRIES

IV.1 - ORIGINE DES DISSYMETRIES.

Malgré toutes les précautions prises dans le réglage, il subsiste toujours des dissymétries, difficiles à annuler, qui contribuent au "bruit de fond" que l'on peut constater même avec un amortissement non négligeable.

Ces dissymétries prennent leurs origines :

a) dans la dissymétrie de la réponse de la photodianode qui même en supposant la réponse bien linéaire donne :

$$e = A.\ \vartheta + e_o$$

b) dans la dissymétrie de la lampe électromètre et sa dérive inévitable d'où :

$$E = E_o + Ke \quad \text{Soit : } E = E_o + Ke_o + KA.\vartheta$$

c) enfin dans les différences de potentiel de contact, malgré toutes les précautions prises dans le câblage. Pour une position du relais nous avons une ddp de contact dans un certain sens. Pour l'autre position du relais nous avons une ddp de contact soit de même sens soit de sens opposé et de module, soit supérieur soit inférieur. C'est-à-dire qu'à la tension : $(KA\vartheta + Ke_o + E_o).\ \tilde{\tilde{S}}$ s'ajoute une tension crénelée de la forme : $\varepsilon' + \varepsilon''.\ \tilde{\tilde{S}}$.

Par suite l'équation du simulateur s'écrit en réalité :

$$y'' + \alpha.\ y' + [\lambda + \varkappa.\ \tilde{\tilde{S}}].\ y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.\ \tilde{\tilde{S}}$$

Les termes ε_1 et ε_2 sont faibles ; cependant malgré cela, leur influence peut perturber considérablement le fonctionnement du simulateur.

C'est ce que nous allons montrer maintenant et pour ce, nous allons étudier la stabilité de l'équation, avec second membre non nul et crénelé périodiquement.

IV.2 - STABILITE DE L'EQUATION AVEC AMORTISSEMENT A CRENEAUX SYMETRIQUES ET A SECOND MEMBRE NON NUL, PERIODIQUE ET CRENELE.

Pour $\alpha = 0$, ce cas correspond à l'étude des perturbations du type "défauts d'alignement" dans un synchrotron à convergence forte. Il a été étudié par divers auteurs. On consultera par exemple Seiden (1).

L'équation étant linéaire, la solution est la somme de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière avec second membre.

Nous aurons donc pour l'équation : $y'' + \alpha.y' + \beta.y = \gamma$ la matrice de transfert suivante, en posant : $\omega^2 = \beta - \frac{\alpha^2}{4}$ et en suivant le calcul du chapitre III :

$$\begin{Vmatrix} y(t+\tau) - \gamma/\beta \\ y'(t+\tau) - o \end{Vmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right) \cdot \begin{Vmatrix} \cos\omega\tau + \frac{\alpha}{2\omega}\sin\omega\tau & \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau \\ -\left(\omega + \frac{\alpha^2}{4\omega}\right)\sin\omega\tau & \cos\omega\tau - \frac{\alpha}{2\omega}\sin\omega\tau \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y(t) - \gamma/\beta \\ y'(t) \end{Vmatrix}$$

Considérons maintenant l'équation de Hill :

$$y'' + \alpha . y' + (\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T)) . y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \tilde{\tilde{S}}(T)$$

Prenons une origine des temps telle que le début du demi-créneau positif soit en t_o. Il vient :

$$\begin{Vmatrix} y\left(t_o + \frac{T}{2}\right) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda + \varkappa} \\ y'\left(t_o + \frac{T}{2}\right) - o \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M(aT/2) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y(t_o) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda + \varkappa} \\ y'(t_o) - o \end{Vmatrix}$$

Ce qui en posant

$$\begin{Vmatrix} m(aT/2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - \left(\cos\frac{\alpha T}{2} + \frac{\alpha}{2a} \cdot \sin\frac{aT}{2}\right) . \exp\left(-\frac{\alpha T}{4}\right) \\ \left(a + \frac{\alpha^2}{4a}\right) . \sin\frac{aT}{2} . \exp\left(-\frac{\alpha T}{4}\right) \end{Vmatrix}$$

s'écrit également

$$\begin{Vmatrix} y(t_o + T/2) \\ y'(t_o + T/2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M(aT/2) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda + \varkappa} \cdot \begin{Vmatrix} m(aT/2) \end{Vmatrix}$$

soit pour le créneau entier :

$$\begin{Vmatrix} y(t_o + T) \\ y'(t_o + T) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix} + \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda + \varkappa}\right) \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} m\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix} + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\lambda - \varkappa}\right) \cdot \begin{Vmatrix} m\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix}$$

Par suite au bout du n^{ième} créneau nous avons :

$$\begin{Vmatrix} y(t_o + nT) \\ y'(t_o + nT) \end{Vmatrix} = \left\{ \begin{Vmatrix} M_{ba} \end{Vmatrix} \right\}^n \times \begin{Vmatrix} y(t_o) \\ y'(t_o) \end{Vmatrix} + \sum_{i=o}^{i=n-1} \left\{ \begin{Vmatrix} M_{ba} \end{Vmatrix} \right\}^i \cdot \begin{Vmatrix} m \end{Vmatrix}$$

avec

$$\begin{Vmatrix} M_{ba} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix}$$

et

$$\begin{Vmatrix} m \end{Vmatrix} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda + \varkappa}\right) \cdot \begin{Vmatrix} M\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} m\left(\frac{aT}{2}\right) \end{Vmatrix} + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\lambda - \varkappa}\right) \cdot \begin{Vmatrix} m\left(\frac{bT}{2}\right) \end{Vmatrix}$$

Développons $\| m \| . \| 1 \|$ suivant les vecteurs propres y_1 et y_2 de la matrice M. Il vient :

$$\begin{Vmatrix} y(t_o + nT) \\ y'(t_o + nT) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r_1^n & o \\ o & r_2^n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1(t_o) \\ y_2(t_o) \end{Vmatrix} + \sum_{i=o}^{i=n-1} \begin{Vmatrix} r_1^i & o \\ o & r_2^i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} m_1 y_1(t_o) \\ m_2 y_2(t_o) \end{Vmatrix}$$

Quand n tend vers l'infini, et dans le cas où le module de chaque valeur propre est inférieur à l'unité, la somme Σ tend vers :

$$\Sigma \longrightarrow \frac{1}{1 - \begin{Vmatrix} r_1 & o \\ o & r_2 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{\begin{Vmatrix} 1 - r_1 & o \\ o & 1 - r_2 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \times \begin{Vmatrix} 1 - r_2 & o \\ o & 1 - r_1 \end{Vmatrix}$$

Par conséquent nous pouvons conclure :

a) Pour $|r| > 1$, le mouvement est instable (comme pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$).

b) Pour $|r| = 1$, le mouvement n'est plus périodique comme dans le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$; $\alpha > 0$, puisque la série Σ diverge.

c) Pour $|r| < 1$, le mouvement est stable mais ne tend plus vers zéro. Il reste un mouvement forcé, responsable de certaines résonnances.

d) Le mouvement étant stable mathématiquement prend une amplitude physiquement dangereuse quand on se rapproche des courbes de transitions. En effet, nous avons alors $|r| \longrightarrow 1$; le mouvement forcé résiduel croît donc comme : $\frac{A(\lambda, \varkappa, \alpha, T, t)}{1 - r}$. Il sera donc difficile d'obtenir des transitions expérimentales nettes.

e) Les transitions seront encore beaucoup moins nettes aux alentours de la première bissectrice du fait du terme en : $\frac{1}{\lambda - \varkappa}$.

f) Ces circonstances défavorables seront d'autant mieux compensées que les termes ε_1 et ε_2, ainsi que la somme : $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ seront plus petits.

Nous limiterons là notre étude de l'influence des dissymétries.

IV.3 - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES.

Nous avons procédé à un certain nombre de vérifications d'ordre plus qualitatif que quantitatif.

a) Les paramètres étant choisis de manière à obtenir un mouvement stable (par exemple f = 5 cps) et tendant vers zéro - (amortissement non nul mais dissymétrie nulle), nous imposons au système une dissymétrie mesurée par le décalage du spot au repos. Puis mettant les relais en action, nous mesurons l'amplitude maxima du mouvement forcé. La courbe obtenue est reportée figure 41. Elle est toutefois relativement peu intéressante, car elle indique la proportionnalité du mouvement forcé à la dissymétrie $\overset{\frown}{\varepsilon}$ donc exprime finalement une mesure de la linéarité de la réponse de la cellule photodifférentielle.

b) Les paramètres étant choisis de manière à obtenir un mouvement stable comme précédemment, nous maintenons la fréquence à une valeur fixe (f = 5), ainsi que la dissymétrie encore mesurée par le décalage du spot sur la règle graduée (ε = 50 mm), les relais étant au repos. Ces derniers étant mis en action, nous faisons alors varier $\varkappa$. L'expérience a été faite avec l'amortissement minimum c'est-à-dire l'amortissement intrinsèque au simulateur. La courbe 42 représente précisément les variations d'amplitude maxima en fonction du rapport : $\varkappa / \lambda$. La courbe obtenue quand $\varkappa$ se rapproche de λ, n'est pas incompatible avec l'allure hyperbolique attendue.

c) Le mouvement étant choisi stable comme précédemment, nous maintenons fixes tous les paramètres, sauf la fréquence que nous faisons varier très lentement de manière à obtenir la zone instable puis à la dépasser et à retomber dans une zone stable. La figure 43 montre l'évolution de l'amplitude maxima en fonction de la période, autrement dit sa variation lorsque le point de fonctionnement se déplace sur une droite $y = \frac{|\varkappa|}{\lambda}$. x sur le diagramme α = cste. (Les résultats indiqués concernent cependant un deuxième galvanomètre et non celui indiqué au premier chapitre).

Nous pouvons nous rendre compte que la transition n'est pas brutale, contrairement à la théorie sans dissymétrie mais conformément à celle que nous venons de rappeler. La figure 44 précise, par dilatation de l'échelle des périodes, l'allure des deux transitions. Une vérification quantitative semble peu commode. L'imprécision due aux transitions est de l'ordre de 288-275 ~ 13 millisec. et de 520-497 ~ 23 millisec. pour une zone de 497-288 ~ 209 millisec. Les bandes de transition sont donc de l'ordre de 5 à 10 % de la largeur de bande moyenne. En réalité la mesure doit être effectuée entre les flancs abrupts de la bande. La transition est quelquefois assez peu sensible, cependant un relevé n'est pas nécessaire en général avec un peu d'habitude. La mesure a d'ailleurs été faite avec une dissymétrie de 1 mm. Le réglage pouvant être fait à 1/5 ou 1/10 mm, les

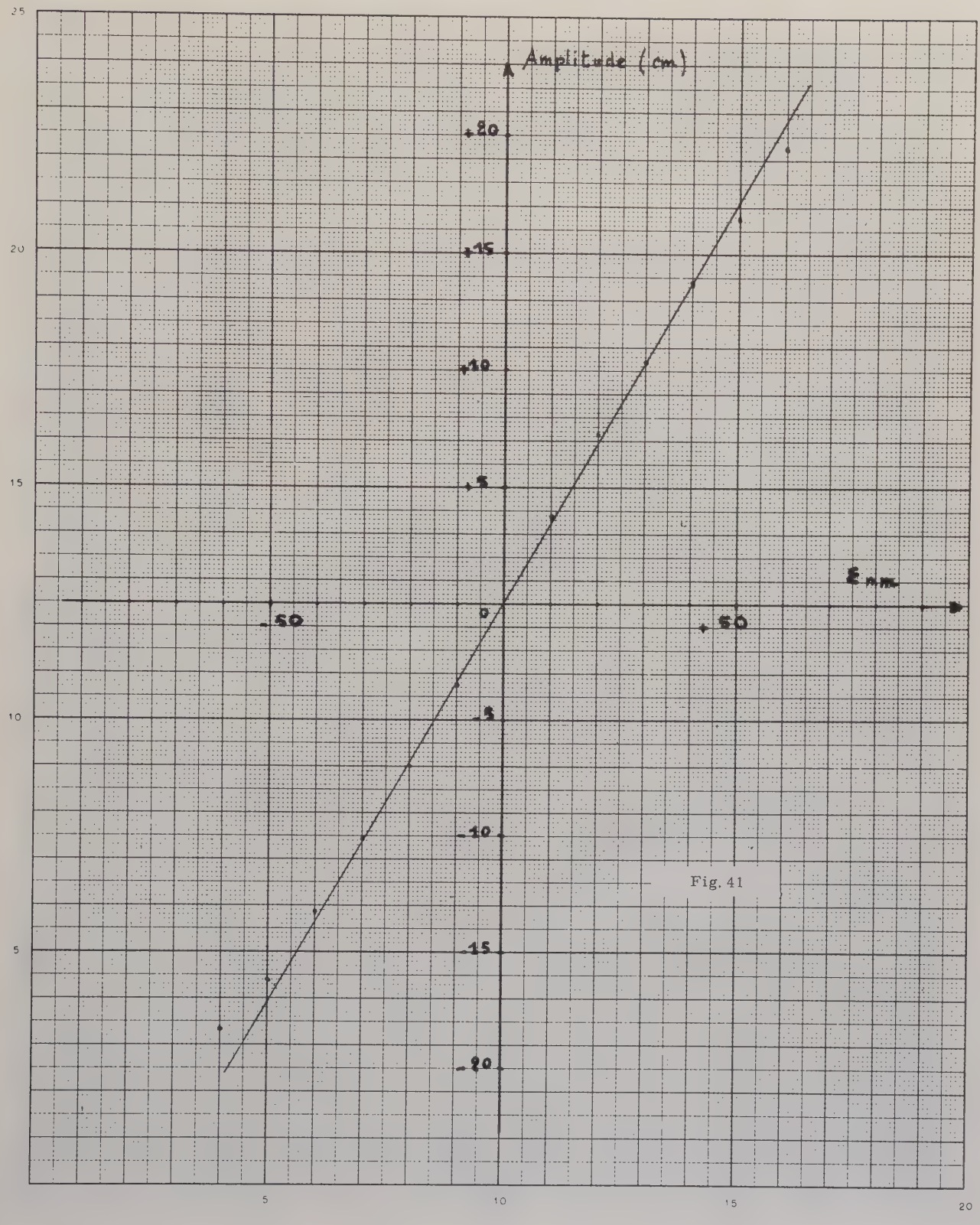


Fig. 41

A Amplitude (cm)
2/λ
25
20
15
10
5
0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
1
15
10
5
0
LES PAPIERS CANSON - FRANCE

Fig. 42

Fig. 43

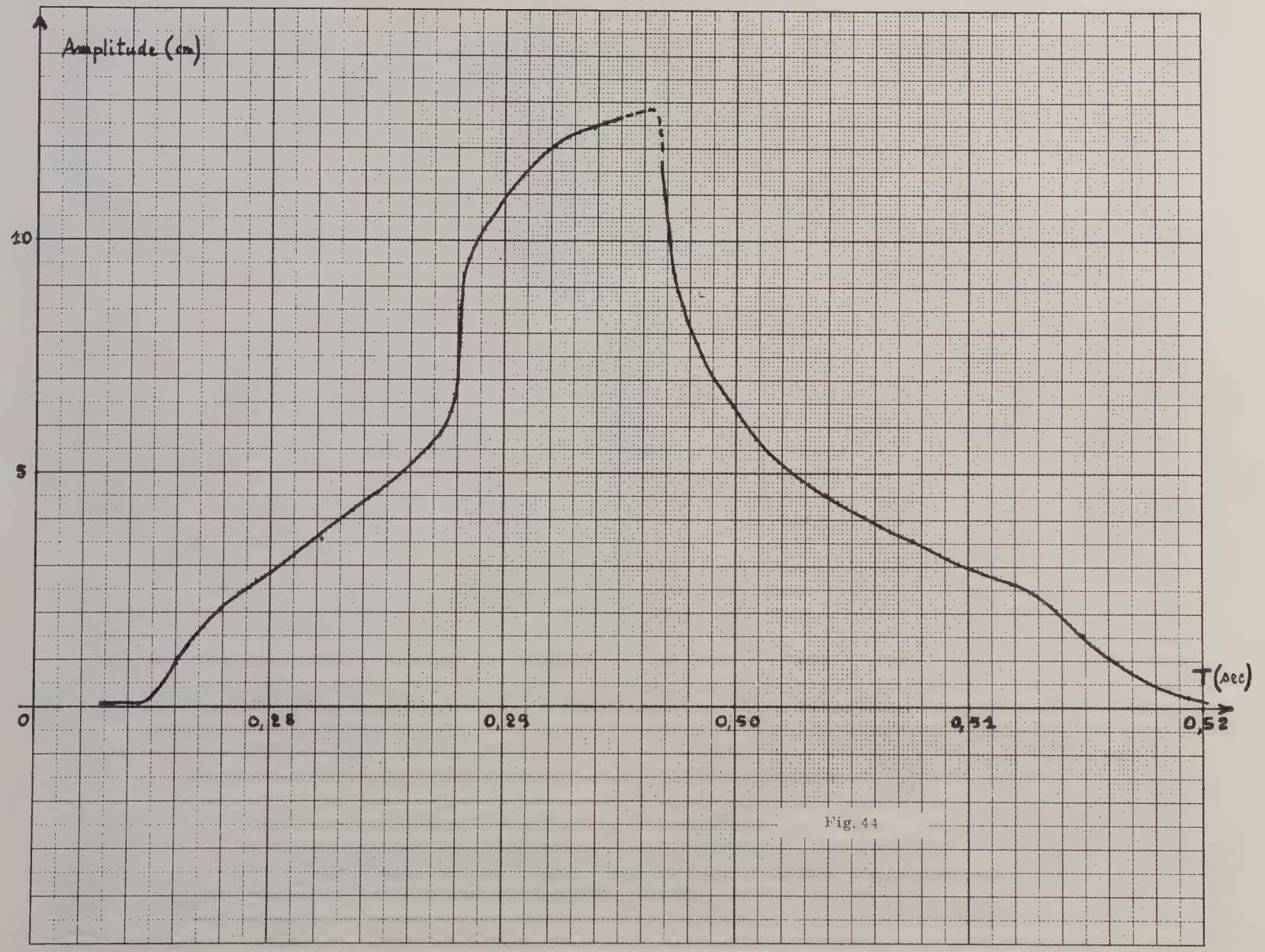


Fig. 44

flancs seront donc plus abrupts et la précision meilleure. La non linéarité de la cellule intervient toutefois en sens opposé.

Ainsi donc les dissymétries nous donnaient l'explication d'un certain nombre de difficultés dans les mesures. Soit : la difficulté d'obtenir une transition bien nette entre zone stable et zone instable, l'existence de certaines résonances et la difficulté d'obtenir une transition bien nette aux alentours de la première bissectrice.

Toutefois cela n'expliquait pas d'une manière satisfaisante la non-concordance des courbes théoriques et expérimentales ainsi que la non régularité de ces dernières ; et ce d'autant plus que les premières courbes expérimentales à amortissement minimum épousaient la courbe théorique ($\alpha T = 0 = \alpha$) d'une manière plus satisfaisante.

Nous avons pensé que ces difficultés venaient peut-être d'un déréglage de la symétrie des créneaux au cours du temps et d'autres manipulations. En effet, avec le périodemètre nous ne pouvions alors mesurer que la durée totale du créneau. Nous ne disposions pas non plus d'oscillographe descendant suffisamment bas en fréquence. Un réglage, possible sur les gammes les plus rapides ($500 > f > 50$) et ($50 > f > 5$) ne donne d'ailleurs qu'une précision insuffisante quelque soit la manière dont on l'envisage. Et surtout les fréquences correspondant aux zones de transition se situent aux alentours de 0,5 et par suite se trouvent à cheval sur les gammes ($5 > f > 0,5$) et ($0,5 > f > 0,05$). Ce fait n'est pas du tout favorable à la stabilité de la fréquence et du rapport des "demi-périodes", par les commutations de gamme qui en résultent.

C'est pourquoi, d'une part, nous avons entrepris de perfectionner le périodemètre électronique de manière à pouvoir lui faire mesurer les "demi périodes" désirées. (Ce perfectionnement a été tout de suite indiqué dans l'étude du chronomètre électronique chapitre I).

D'autre part, pour évaluer la compatibilité de l'ordre de grandeur des erreurs, nous avons entrepris l'étude de l'influence de la dissymétrie algébrique des créneaux sur les diagrammes de stabilité, influence que nous allons maintenant préciser.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

(1) SEIDEN J. - La stabilité des Orbites dans le Synchrotron à Forte Convergence (Thèse, Paris 1955).

CHAPITRE V

DIAGRAMME DE STABILITÉ DE L'ÉQUATION AVEC AMORTISSEMENT

$$y'' + \alpha \cdot y' + [\lambda + \varkappa \tilde{\tilde{S}}(t)] \cdot y = 0$$

POUR DES CRÉNEAUX $\tilde{\tilde{S}}$ DISSYMÉTRIQUES DE DISSYMÉTRIE $d = \frac{T_1 - T_2}{T}$

V-1 - ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DE STABILITE.

Nous sommes donc amenés à étudier la stabilité de l'équation à créneaux dissymétriques ($T_1 \neq T_2$) :

$$y'' + \alpha . y' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T_1 ; T_2)] . y = 0$$

Pour cela nous introduisons la dissymétrie algébrique : $d = \frac{T_1 - T_2}{T}$, T_1 correspondant à : $\tilde{\tilde{S}} = +1$ et T_2 à $\tilde{\tilde{S}} = -1$, comme l'indique la figure 45. D'où :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{T}{2} \cdot (1 + d) \\ T_2 = \frac{T}{2} \cdot (1 - d) \end{cases}$$

Pour $d = 0$ le créneau est symétrique. Pour $d = \pm 1$ le créneau se transforme en une suite périodique d'impulsions de hauteur ∓ 2 reliées par une base d'ordonnée ± 1.

Pour établir la condition de stabilité, il nous suffit de revenir à la relation de transfert établie au début du chapitre III et qui s'écrit :

$$\begin{Vmatrix} y(t+\tau) \\ y'(t+\tau) \end{Vmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right) \cdot \begin{Vmatrix} \left(\cos\omega\tau + \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \sin\omega\tau\right) & \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau \\ -\left(+\omega + \frac{\alpha}{4\omega}\right) \cdot \sin\omega\tau & \left(\cos\omega\tau - \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \sin\omega\tau\right) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{Vmatrix}$$

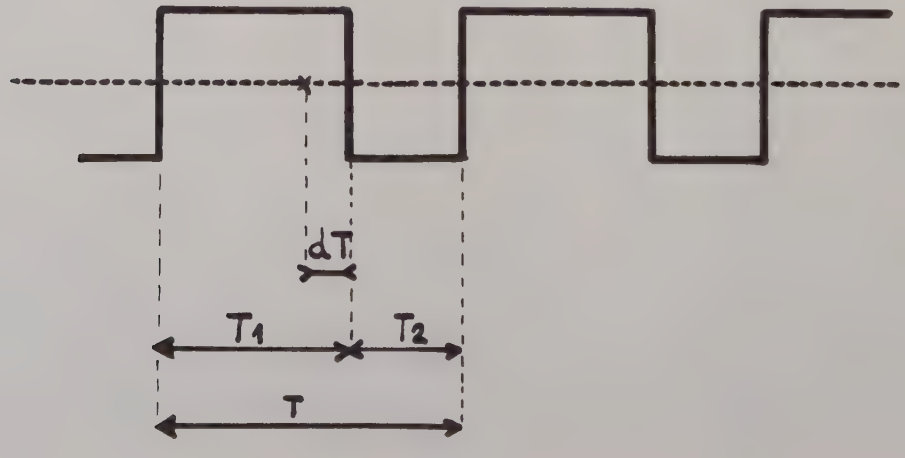


Fig. 45

Par conséquent la matrice de transfert pour le créneau dissymétrique se déduit de la matrice de transfert pour le créneau symétrique en remplaçant dans cette dernière la quantité $\frac{T}{2}$ par $\frac{T}{2}.(1+d)$ et τ par $\frac{T}{2}.(1-d)$. Il en résulte que le Wronskien $\delta = \delta_o . \exp(-\alpha T)$ de la matrice de transfert reste invariant. Par contre la trace $t = M_{11} + M_{22}$ se modifie et la condition de stabilité devient (1):

$$\left| 2.\cos\left\{\frac{aT}{2}(1+d)\right\}.\cos\left\{\frac{bT}{2}(1-d)\right\} - \left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}.\sin\left\{\frac{aT}{2}(1+d)\right\}.\sin\left\{\frac{bT}{2}(1-d)\right\}\right| \leqslant 2\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha T}{2}$$

Pour la discussion complète nous renvoyons au chapitre III. Rappelons simplement qu'en plus de la condition de stabilité indiquée, l'amortissement α doit être positif le mouvement étant toujours instable pour $\alpha < 0$.

V-2 - CALCUL DES DIAGRAMMES UNIVERSELS : αT = cste POUR DES CRENEAUX DISSYMETRIQUES

Nous avons maintenant 5 paramètres λ, $\varkappa$, α, T, d. Nous avons conservé les coordonnées déjà prises pour d = 0, c'est-à-dire

$$x = \frac{l.T^2}{4\pi^2} = \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right).\frac{T^2}{4\pi^2} \quad \text{et} \quad y = |\varkappa| . \frac{T^2}{4\pi^2}$$

ainsi que le tracé à αT = cste, la dissymétrie algébrique étant toutefois fixée à une valeur donnée. Nous nous sommes également limités au premier quadrant et aux premières zones.

Le calcul effectif s'obtient toujours de la même manière en recherchant les points d'intersection des courbes de transition αT = cste, avec les droites $y = \frac{|\varkappa|}{l}.x$ passant par l'origine. Nous avons choisi pour $|\varkappa|/l$ les mêmes valeurs que précédemment soit :

$$|\varkappa|/l = \infty \; ; \; 845/123 \; ; \; 13/5 \; ; \; 5/3 \; ; \; 5/4 \; ; \; 1 \; ; \; 4/5 \; ; \; 3/5 \quad 5/13 \; ; \; 0$$

de manière à obtenir, comme déjà dit, des racines carrées de carrés parfaits donc des arcs ou des arguments multiples. Nous avons également recherché les points d'intersection avec un certain nombre de droites $y = -x + n$. D'autre part pour $\alpha . T$ = cste nous nous sommes limités à différentes valeurs entières 0, 1, 2, ...6 et même plus suivant la valeur de la dissymétrie algébrique. Pour celle-ci nous nous sommes limités aux valeurs d = - 0,4 ; - 0,1 ; (0) ; + 0,1 ; + 0,4.

Nous avons ainsi tracé quatre autres diagrammes universels représentés sur les figures (46 à 50) avec le diagramme d = 0. Pour ce faire nous avons calculé les coordonnées de 300 points théoriques (non compris les 135 points du diagramme d = 0). Ce grand nombre de points est pourtant juste suffisant pour déterminer l'allure générale des courbes, particulièrement pour les diagrammes d = ± 0,1. Nous avons toutefois profité de la vérification expérimentale de ces diagrammes théoriques pour préciser leur allure (1). Nous allons en parler maintenant.

V-3 - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES.

Nous avons déjà dit que la vérification expérimentale de diagrammes universels $\alpha . T$ = cste était malaisée à obtenir avec un appareil comme le simulateur. Il nous fallait donc, vérifier les diagrammes sur une autre machine.

Nous avons eu la chance de pouvoir disposer des machines du Laboratoire de Calcul Analogique du C.E.A. à Saclay. Le générateur très basse fréquence que nous avons utilisé est un générateur C.R.C.(T.B.F.G.B. 64) identique à celui indiqué dans le premier chapitre. Toutefois le périodemètre que nous avons employé est un périodemètre de conception C.E.A. (2). Nous allons maintenant parler de la machine analogique universelle.

V-3-1 - Machine universelle utilisée.

Nous avons eu à notre disposition une machine Derveaux "Djinn", consistant en un certain nombre d'amplificateurs à gain élevé (sans choppers), chacun pouvant être associé à un boîtier fonctionnel additionneur, déphaseur, intégrateur.

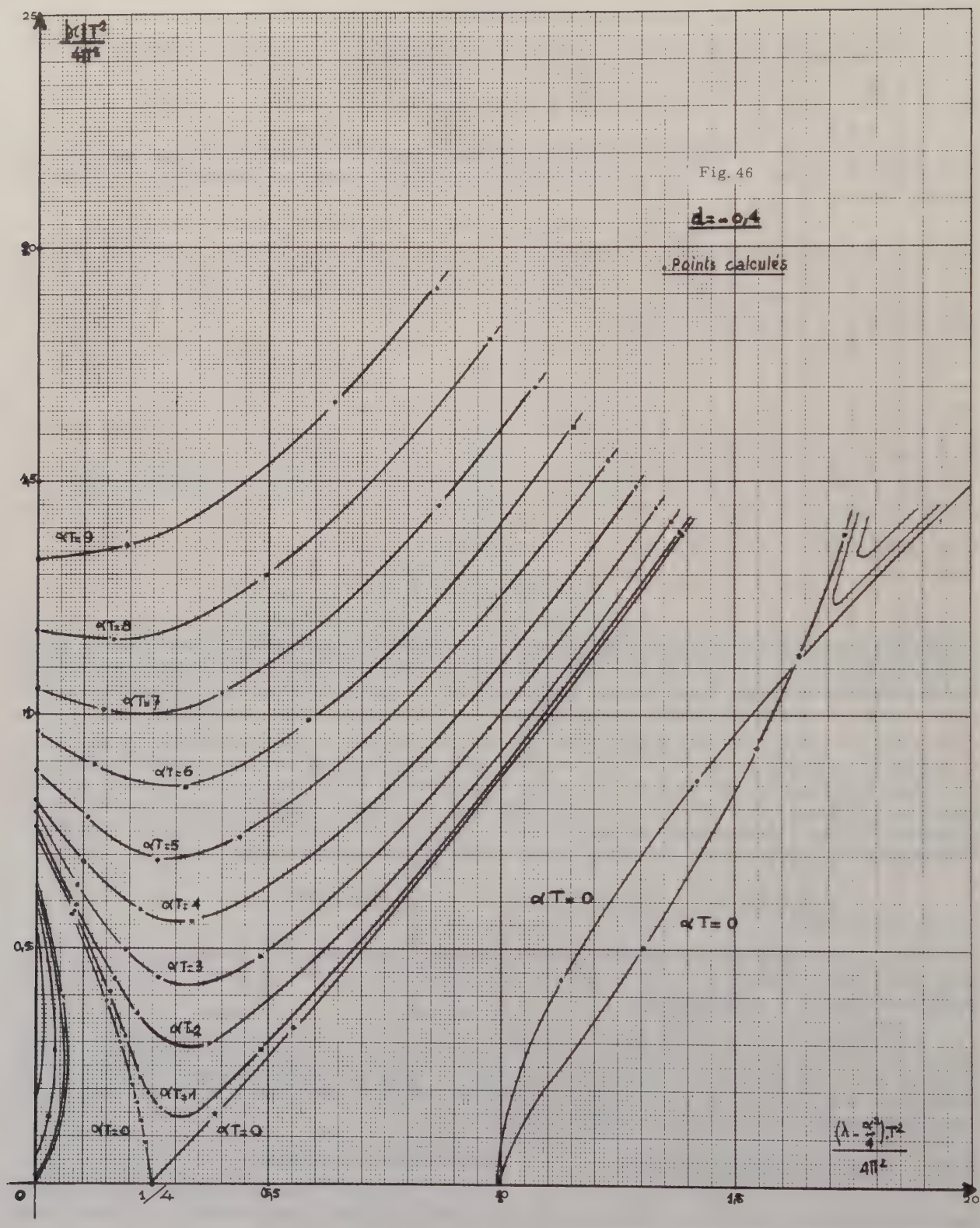


Fig. 46
d = 0,4
Points calculés
$\frac{\alpha(1+T^2}{4\pi^2}$
$\frac{(\lambda-\frac{\alpha^2}{4})T^2}{4\pi^2}$
αT=9
αT=8
αT=7
αT=6
αT=5
αT=4
αT=3
αT=2
αT=1
αT=0
αT=0
αT=0
αT=0
25
20
15
10
0,5
0
1/4
0,5
1
1,5
2

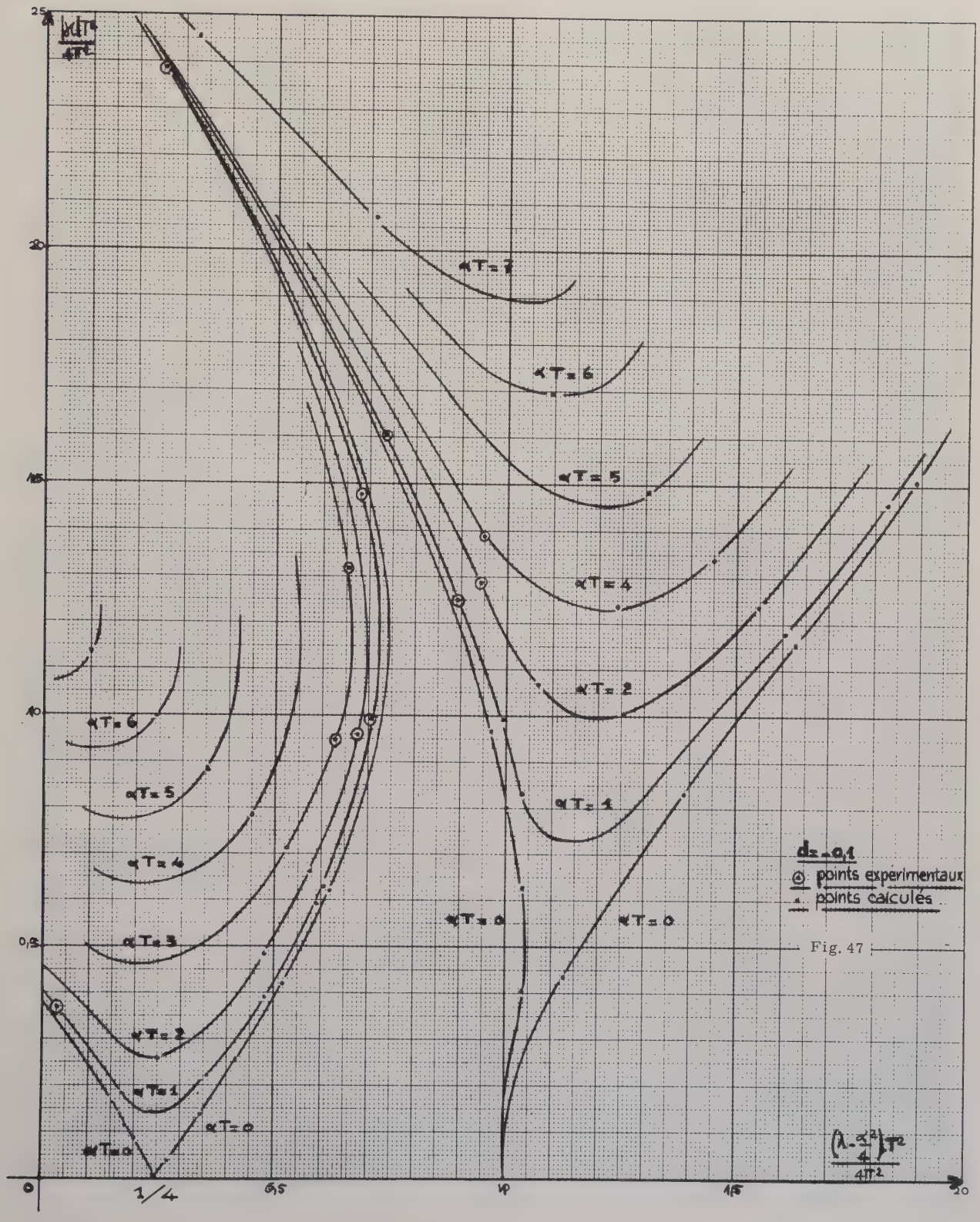
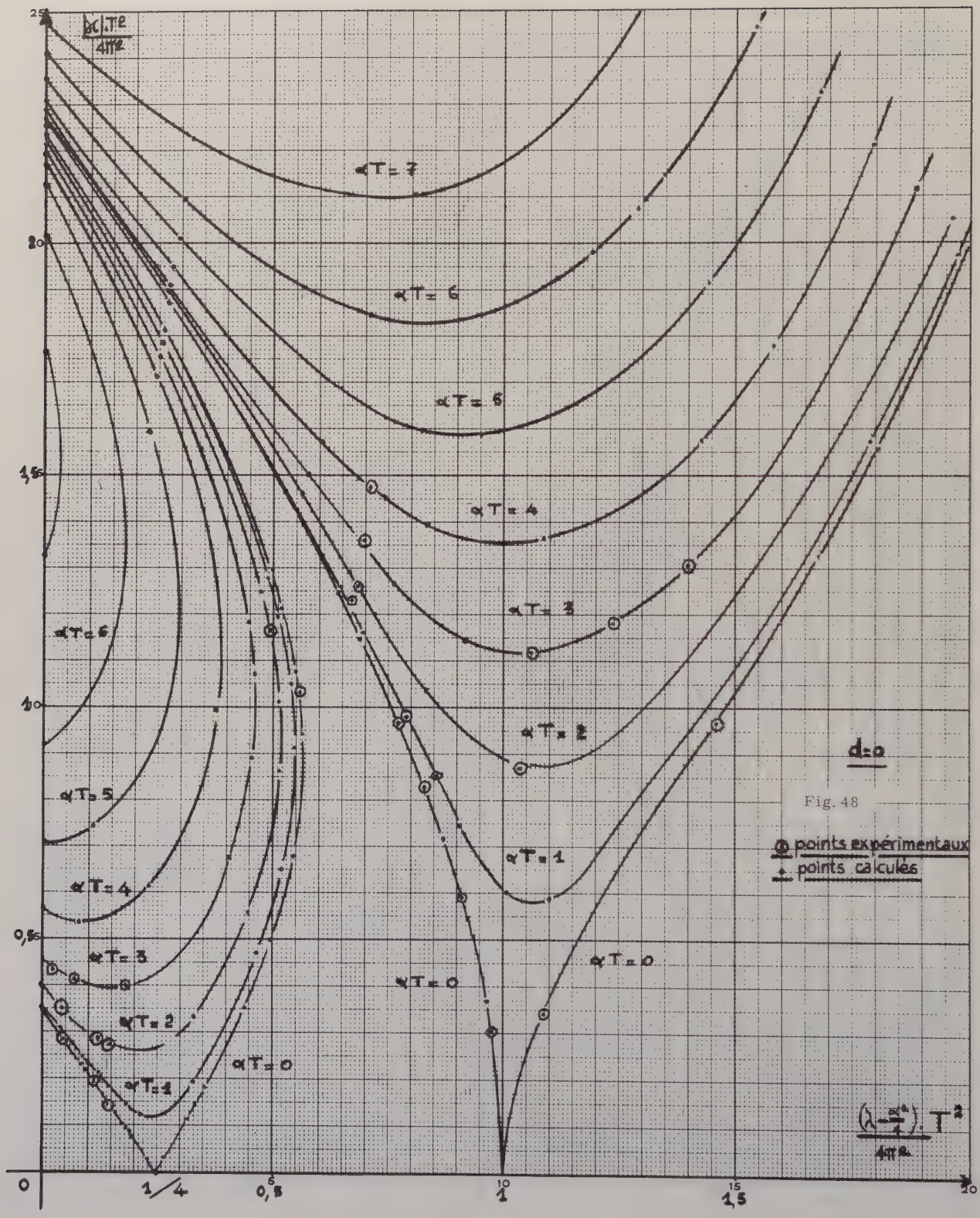

25
20
15
10
0,5
0
1/4
0,5
1
1,5
2
$\frac{\alpha_1 T^2}{4\pi^2}$
$\frac{\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right)T^2}{4\pi^2}$
αT = 7
αT = 6
αT = 5
αT = 4
αT = 3
αT = 2
αT = 1
αT = 0
αT = 6
αT = 5
αT = 4
αT = 3
αT = 2
αT = 1
αT = 0
αT = 0
d = 0,1
points expérimentaux
points calculés

Fig. 47


$\frac{\alpha c}{4\pi^2}$
$\alpha T = 7$
$\alpha T = 6$
$\alpha T = 5$
$\alpha T = 4$
$\alpha T = 3$
$\alpha T = 2$
$\alpha T = 1$
$\alpha T = 0$
d=0
Fig. 48
points expérimentaux
points calculés
$\frac{(\lambda - \frac{\alpha^4}{4}) \cdot T^2}{4\pi^2}$
0
1/4
0,5
1
1,5
2
0,5
1
1,5
2

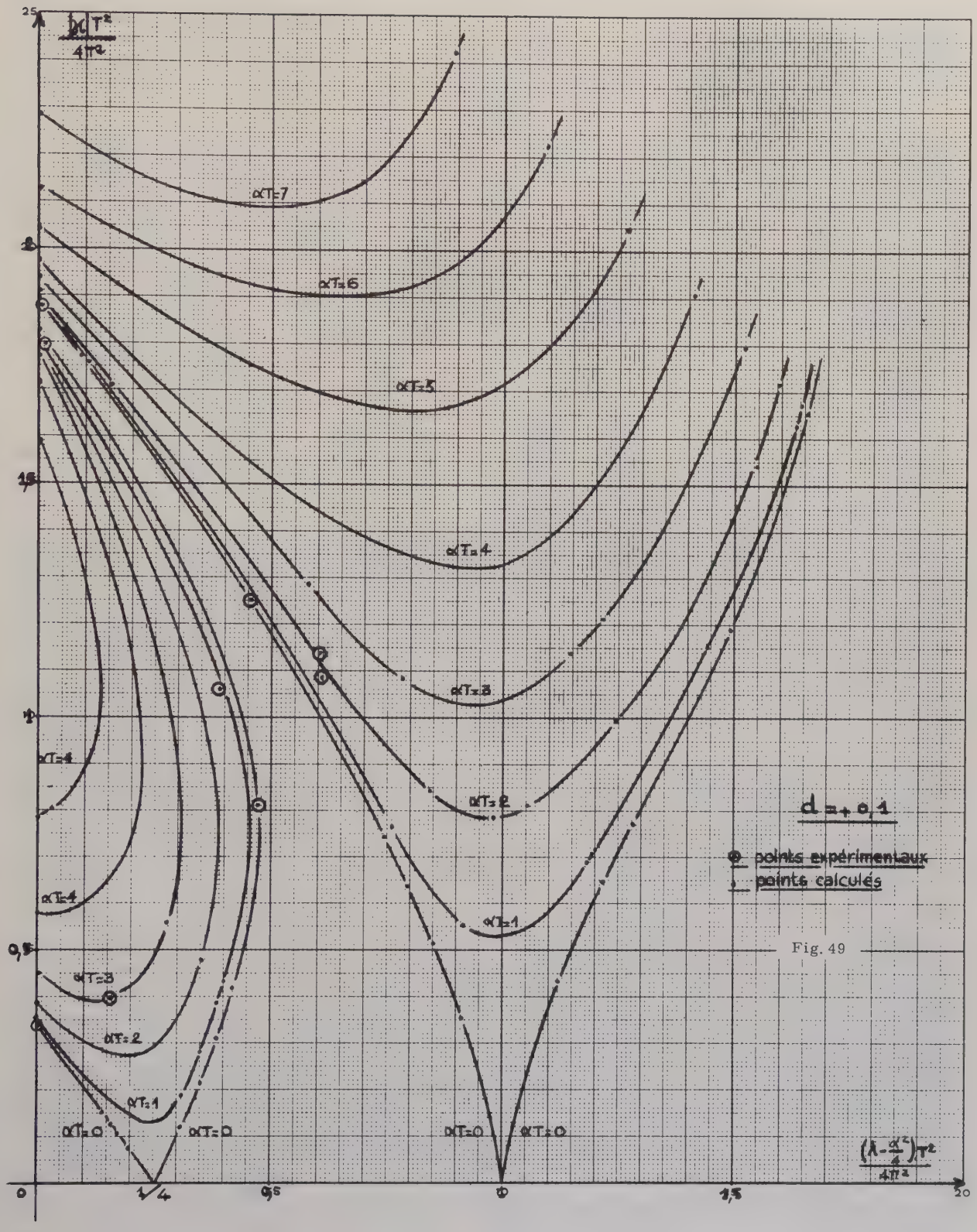

$\frac{b(T^2}{4\pi^2}$
αT=7
αT=6
αT=5
αT=4
αT=3
αT=2
αT=1
αT=0
αT=4
αT=4
αT=3
αT=2
αT=1
αT=0
αT=0
d = + 0,1
points expérimentaux
points calculés
$\frac{(\lambda-\frac{\alpha^2}{4})T^2}{4\pi^2}$
0
1/4
0,5
1
1,5
2
0,5
1

Fig. 49

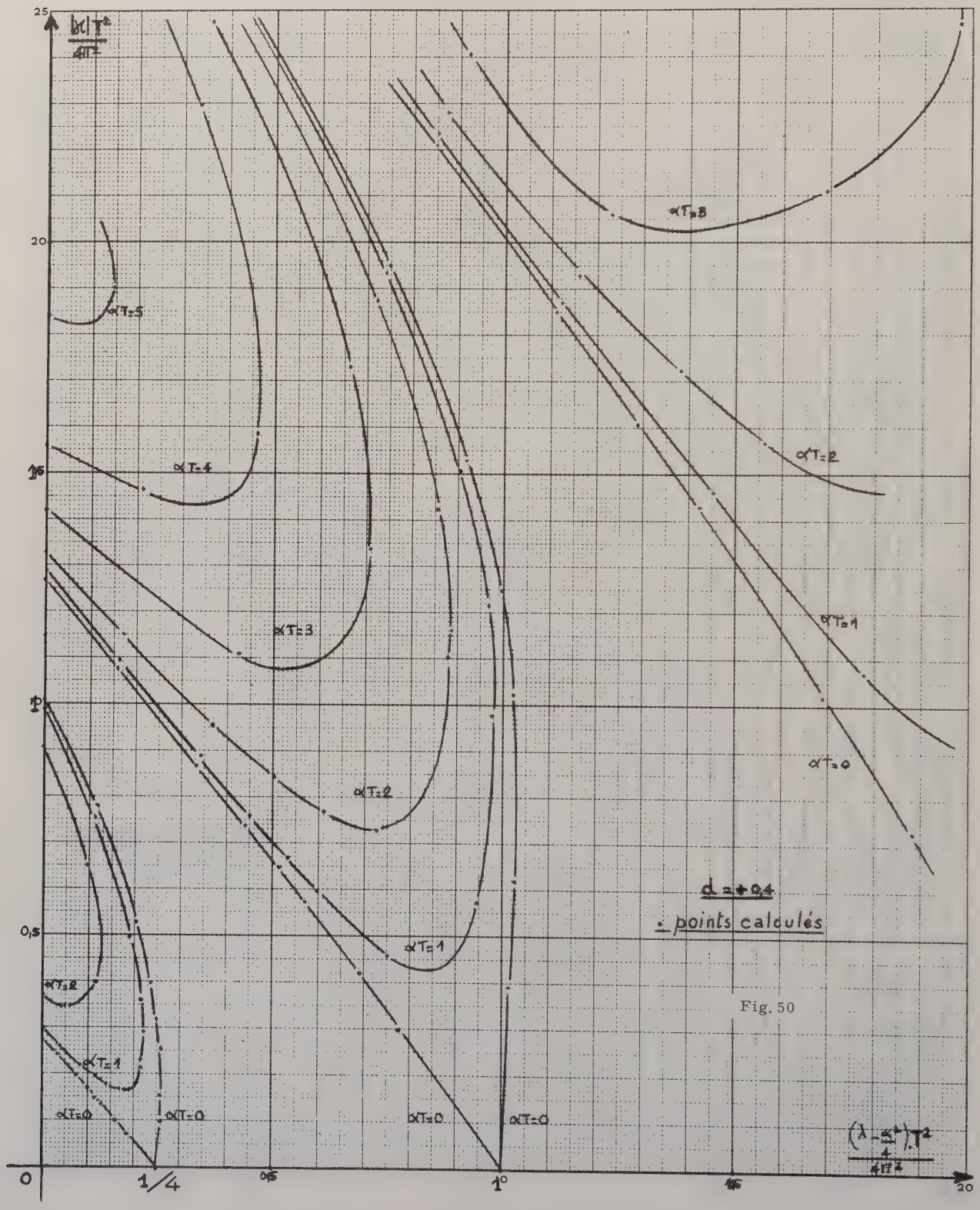

25
20
15
10
0,5
0
1/4
0,5
1°
1,5
2°
$\frac{bc}{4\pi^2}T^2$
$\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right)\frac{T^2}{4\pi^2}$
αT=3
αT=2
αT=1
αT=0
αT=4
αT=5
d = +0,4
· points calculés

Fig. 50

Du fait de l'absence de choppers, les amplificateurs introduisent des dérives, ce qui est particulièrement gênant pour une suite d'intégrateurs. Un amplificateur intégrateur est dit bien réglé lorsqu'on obtient une dérive de 30 mV par minute. On admet alors généralement que le calcul est valable pendant une durée maximum de deux minutes. Toutefois pour certains amplis on peut arriver à obtenir par un réglage soigné de la symétrie, une dérive passant une fois (et une seule) par zéro, au bout de deux minutes environ. On peut alors disposer d'un temps de calcul de 4 minutes, surtout si l'on a pris soin de faire correspondre le meilleur intégrateur à la dérivée d'ordre le plus élevé.

Pour obtenir le produit $= \tilde{S}(t).\ y(t)$ nous avons utilisé tout d'abord un multiplieur électromécanique classique à servomoteur associé au calculateur. Nous l'avons abandonné car nous avons constaté des divergences de plus de 10 % avec la première zone de stabilité ($\alpha = 0 = d$) calculée théoriquement et déjà vérifiée expérimentalement, avec une meilleure précision, par le montage galvanométrique (divergences dues à la bande passante très basse du multiplieur et au faible temps de calcul permis).

Nous avons alors eu la chance de pouvoir utiliser un multiplieur "ELECTRONIC ASSOCIATES". Pour trois entrées, X, Y et U, cet appareil donne les produits $\frac{UX}{100}$, $\frac{UY}{100}$ en utilisant la modulation d'un créneau en amplitude et en dissymétrie. Il permet également d'autres combinaisons, en particulier certaines divisions.

V-3-2 - Mode opératoire.

Les méthodes de calcul analogique étant supposées connues, nous nous bornons à un bref rappel. Soit donc l'équation :

$$y'' + \alpha . y' + [\lambda + \varkappa . \tilde{S}].\ y = 0$$

En nous souvenant que tout amplificateur introduit un changement de signe, nous obtenons comme schéma possible, le schéma de la figure 51. En effet, partons d'un certain point E_1 et décrétons que nous avons là une quantité équivalente à la dérivée seconde de y soit y". Cette quantité une fois intégrée nous donne - y' qui intégrée encore une fois nous donne + y. Nous envoyons alors + y dans la première entrée du multiplieur, la deuxième entrée étant attaquée par la quantité $-(\lambda + \varkappa . \tilde{S})$ (nous verrons comment plus loin). Nous obtenons alors à la sortie du multiplieur la quantité $+(\lambda + \varkappa . \tilde{S}).\ y$. Nous ajoutons maintenant à cette dernière expression, la grandeur $\alpha y'$ par l'intermédiaire d'un déphaseur et d'un potentiomètre. Cette addition se fait grâce à un sommateur à la sortie E_2 duquel nous obtenons : $-\alpha y' - (\lambda + \varkappa . \tilde{S}).\ y$. Connectons maintenant les points E_1 et E_2. Ce faisant nous obligeons les quantités à varier suivant la relation : $y'' = -\alpha y' - (\lambda + \varkappa . \tilde{S}).\ y$, ce qui est bien la relation désirée.

La quantité $-(\lambda + \varkappa . \tilde{S}).\ y$ s'obtient en envoyant dans un sommateur une tension constante de signe adhoc qui en s'ajoutant aux créneaux crées par le générateur permet d'obtenir le rapport $\varkappa / \lambda$ désiré. La sortie de ce sommateur attaque alors la deuxième entrée du multiplieur.

Sur la machine les grandeurs correspondant aux différentes fonctions y, y', y", $\tilde{S}$ etc sont des tensions V_o, V_1, V_2, U volts. Au point E_1 (ou E_2) nous aurons donc une certaine relation soit :

$$0 = V_2 + B V_1 + A_1 V_o + A_2 . \left(\frac{U . V_o}{100}\right)$$

le coefficient $\frac{1}{100}$ venant du fonctionnement du multiplieur (pour éviter les saturations). Il nous faut maintenant préciser les correspondances entre les différents coefficients de l'équation machine et ceux de l'équation originale :

Nous supposerons qu'à une seconde de temps réel ordinaire t de l'équation proposée, il correspond K secondes du "temps machine". Soit $\tau = K . t$. L'équation primitive devient donc :

$$K^2 . \frac{d^2 y}{d\tau^2} + K . \alpha . \frac{dy}{d\tau} + (\lambda + \eta \tilde{S}).\ y = 0$$

D'autre part nous dirons par exemple que y vaut 10 unités lorsque V_o = a volt et poserons S = 1 pour U = b volt. Ce faisant nous aurons $V_o = y . \left(\frac{a}{10}\right)$ et $U = S . \left(\frac{b}{1}\right)$. D'où l'équation machine :

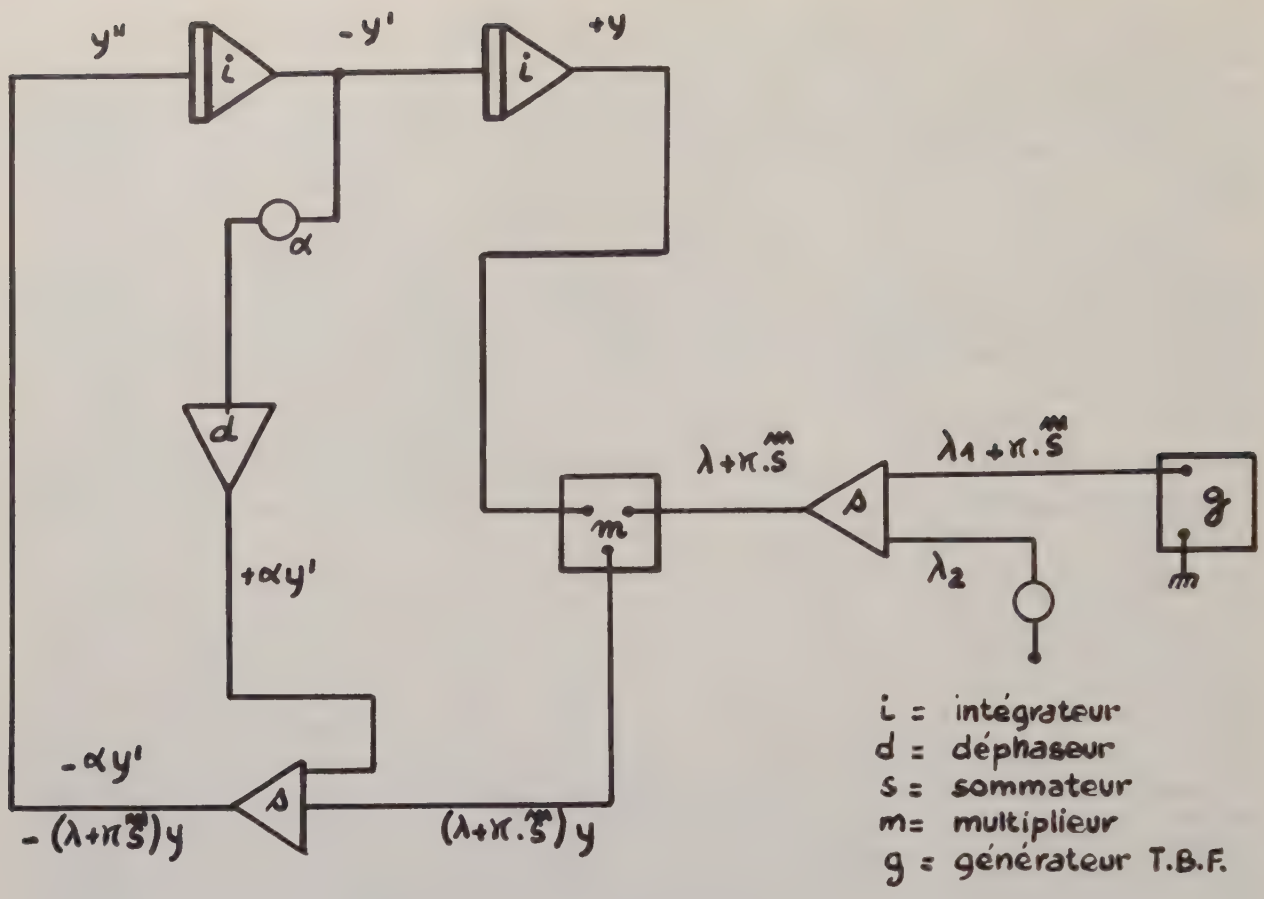


Fig. 51

$$0 = \left(\frac{a}{10}\right) \frac{d^2y}{d\tau^2} + B \left(\frac{a}{10}\right) \frac{dy}{d\tau} + A_1 \left(\frac{a}{10}\right) y + \frac{A_2}{100} \left(\frac{a}{10}\right) y \left(\frac{b}{1}\right) \overset{m}{S}$$

La quantité $\left(\frac{a}{10}\right)$ s'élimine parce que l'équation étudiée est linéaire au sens de l'analyse. D'où les relations finales :

$$B = \frac{\alpha}{K} \qquad A_1 = \lambda / K^2 \qquad A_2 = \frac{\varkappa}{K} \cdot \frac{100}{b}$$

Les coefficients α, λ, $\varkappa$, T étant donnés, ces quantités permettent alors l'"affichage" des coefficients numériques désirés et le réglage de la fréquence des créneaux en jouant sur a, b, $\varkappa$ de manière à obtenir des valeurs A_1, A_2, B compatibles avec le fonctionnement de la machine.

Les mesures s'effectuent de la manière suivante. Nous choisissons une valeur de T commode soit par exemple T = 5 sec. Nous réglons période et dissymétrie soigneusement au chronomètre électronique. Puis nous fixons la valeur de α par un potentiomètre soit 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 d'où α.T = 0 1 ; 2 ; 3 ; 4 etc. L'amplitude $\varkappa$ étant fixée à une valeur raisonnable nous faisons varier λ (ou inversement) de manière à passer d'une zone stable à une zone instable. Nous avons intérêt à opérer ainsi pour éviter des oscillations lentes de la période du générateur TBF autour de la valeur choisie.

V-3-3 - Résultats.

Nous avons effectué la vérification expérimentale pour d = − 0,1 ; 0 ; + 0,1, grâce à une cinquantaine de points environ. Comme il est facile de le voir, la vérification est très bonne.

Malgré le nombre insuffisant de points (500 environ), nous pouvons cependant nous rendre compte nettement de la déformation des diagrammes universels :

Pour $d > 0$ et croissant, les zones de stabilité tournent dans le sens > 0, autour des points doubles fixes $\frac{1}{4}\ m^2 = 0\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{4}{4}\ ;\ \frac{9}{4}$.. etc de l'axe $\frac{l T^2}{4\pi^2}$ et tendent à se coucher sur la gauche. Par suite les points d'intersection avec l'axe $\frac{\varkappa . T^2}{4\pi^2}$ se rapprochent de l'origine.

Pour $d < 0$ et décroissant, le phénomène est inverse, les zones de stabilité tournent dans le sens < 0 autour des points doubles de l'axe $\frac{l . T^2}{4\pi^2}$ et tendent à se coucher sur la droite. Par suite les points d'intersection avec l'axe $\frac{\varkappa . T^2}{4\pi^2}$ s'éloignent de l'origine. De plus des points doubles apparaissent.

Il eût été intéressant de ne pas se limiter aux seules valeurs $d = -0,4\ ;\ -0,1\ ;\ 0\ ;\ 0,1\ ;\ 0,4$. Nous avons bien commencé d'autres calculs mais ceux-ci ne sont pas très agréables et les diagrammes nécessitent un grand nombre de points. Nous avons donc limité là et nos calculs et notre vérification des diagrammes universels d'autant plus que nous avions en vue certaines généralisations aux équations non linéaires à coefficients crénelés (voir chapitre VIII). Il nous semble toutefois que ce travail mériterait d'être repris, particulièrement pour la transition du créneau en impulsions.

Nous allons maintenant parler de la vérification finale par le simulateur des diagrammes particuliers α = cste.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE V

(1) VALAT J. - CRAS 251, 1960, p. 2 274.

(2) GUTMANN Ph. et DUCHEMIN J.P. - Tiroir d'Analyse de tensions carrées (T.A.T.C.). Rapport S.C.E. - 1956. - Département d'Electronique (C.E.A. Saclay).

CHAPITRE VI

VÉRIFICATION FINALE ET CONCLUSIONS

L'influence de la dissymétrie des créneaux nous donnait ainsi une explication - qualitative et en ordre de grandeur - de la non coïncidence de la courbe expérimentale obtenue au moyen du simulateur pour $\alpha = 1$ avec la courbe théorique, tout particulièrement pour le point d'intersection avec l'axe des y, d'après la remarque du chapitre précédent sur la rotation des zones de stabilité autour des points doubles fixes de l'axe des x en fonction de la dissymétrie algébrique.

Il restait malgré tout à effectuer une vérification directe avec le simulateur. Le périodemètre ayant été perfectionné de manière à pouvoir mesurer les demi-périodes, nous avons donc recommencé la vérification expérimentale du diagramme α = cste. Cette vérification a été faite pour la valeur $\alpha = 1$ déjà indiquée et surtout pour la valeur $\alpha = 2$. La figure 52 montre les résultats obtenus. La vérification nous semble remarquablement bonne en particulier en ce qui concerne le point d'intersection avec l'axe des y - qui ne peut être atteint par le simulateur - : l'extrapolation des points expérimentaux nous semble concorder très bien en moyenne avec la courbe théorique.

Ainsi donc un système asservi de conception simple et relativement peu coûteux nous avait permis de vérifier finalement avec une bonne précision les différents diagrammes théoriques calculés. De ce fait il semblait donc que l'on pouvait favorablement envisager le passage à une équation puis à un système d'équations non linéaires. Pour ce faire il nous restait à améliorer le simulateur, soit par exemple : stabilisation du rayonnement de la lampe à ruban de tungstène (10 V 15 A) par emploi de l'alimentation stabilisée à transistors, basse tension, gros débit, due récemment à Sauzade (1) au lieu de batteries-tampon encombrantes ; emploi d'une lampe électromètre à dérive stabilisée par impulsions, (due à Grégoire ?). Et surtout il nous restait à le compléter par des multiplieurs de précision, sans doute électroniques.

En réalité il nous est apparu que dans l'état actuel de la technique des cellules photoélectriques doubles, il n'était guère possible d'utiliser un tel simulateur ailleurs que dans le domaine d'une équation de Hill, principalement à cause de la difficulté d'obtenir une large zone linéaire et de supprimer le bruit de fond dû à l'influence considérable des dissymétries, même faibles, du montage. En effet sur notre échelle graduée translucide, la largeur de la cellule correspond à ± 80 mm et la zone linéaire à ± 55 mm. Pour signifier raisonnablement quelque chose, une élongation doit être prise au moins égale à 1 mm, d'où un facteur de commodité équivalent à $55/1 \sim 50$. Sur une machine "DJINN" avec 30 mV de dérive par minute, un temps de calcul de deux minutes et une limite de linéarité de 100 volts, ce facteur de commodité devient $100\,000/60 \sim 1\,600 \sim 1\,500$. Le simulateur est donc incontestablement moins commode, comme le prouve l'expérience dans certains cas extrêmes où le mouvement oscillatoire s'amplifie peu à peu en fonction de la période (voir le chapitre IV) jusqu'à envahir toute la zone linéaire et se voir borner par la non linéarité inhérente à la réponse de la cellule. Seul le relevé de la courbe amplitude-période permet alors de déterminer la période critique.

D'autre part dans le cas d'une équation de Hill, une théorie bien établie permet d'interpréter les phénomènes assez simplement. Dans le cas d'une équation à coefficients crénelés et nettement non linéaire, aucune théorie existante ne permet de prévoir et de classer les phénomènes. Une étude expérimentale semble donc devoir consister à relever un catalogue des amplitudes (maxima en particulier) en fonction des différents paramètres, particulièrement pour la recherche des instabilités. Les techniques de calcul analogique de changement d'échelle de temps et d'échelle d'amplitude permettent jusqu'à un certain point d'y remédier, mais il nous semble bien évident que la machine utilisée a intérêt à posséder le plus grand facteur de commodité possible, particulièrement pour pouvoir trancher entre une instabilité réelle et une grande amplitude bornée par sa nature même et non pas une non-linéarité étrangère à la question.

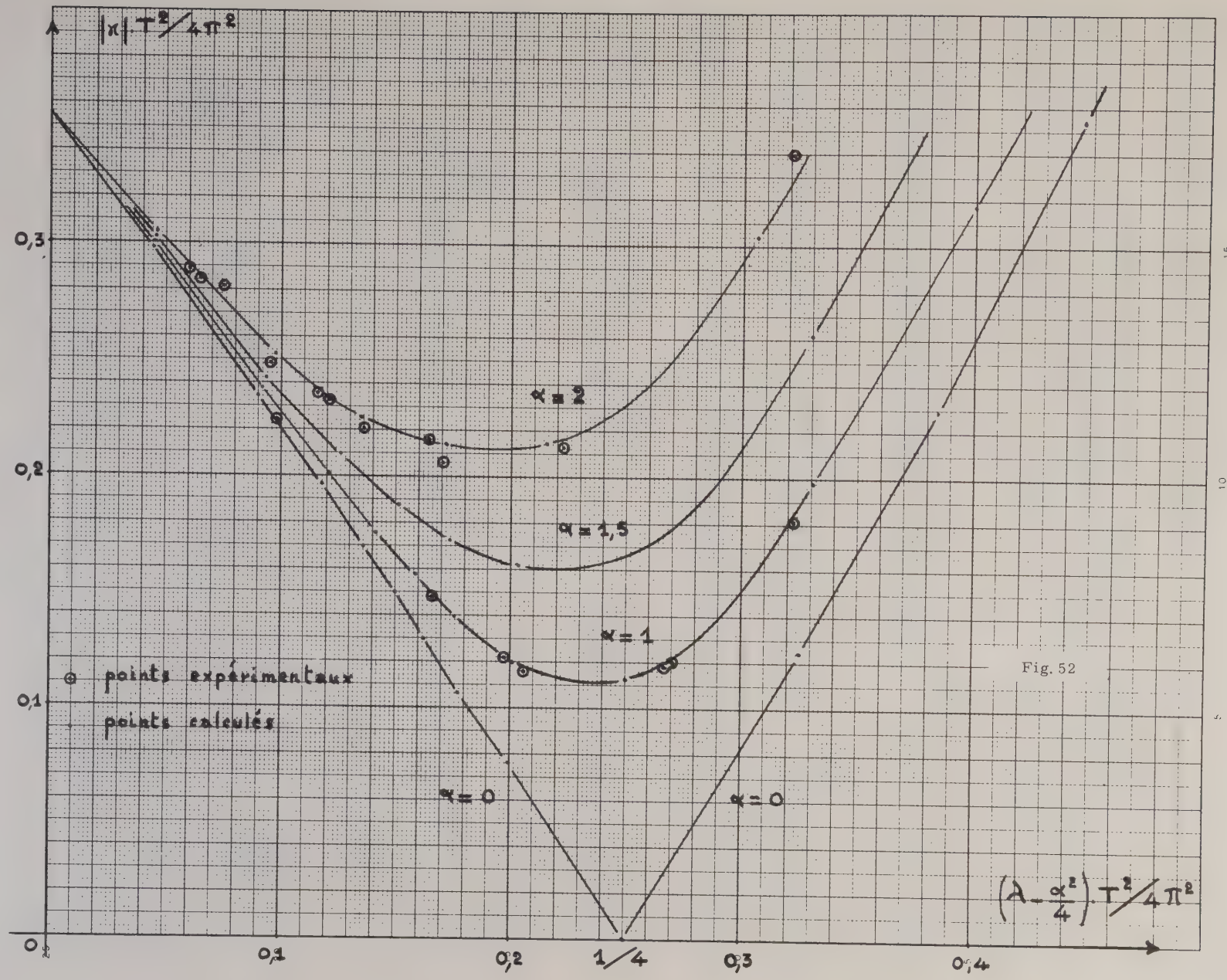

$|\varkappa| \cdot T^2/4\pi^2$
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
1/4
0,3
0,4
$\varkappa = 2$
$\varkappa = 1,5$
$\varkappa = 1$
$\varkappa = 0$
$\varkappa = 0$
points expérimentaux
points calculés
$\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{4}\right) \cdot T^2/4\pi^2$

Fig. 52

En résumé il nous était difficile d'améliorer les performances linéaires de la cellule. Il eût fallu pour cela augmenter considérablement la largeur de la cathode. Malgré sa bonne volonté, la Société constructrice ne le pouvait pas pour des raisons techniques. D'autres Sociétés ne pouvaient s'y intéresser pour des raisons différentes. De plus il nous fallait mettre au point un multiplieur de précision, dont beaucoup de solutions originales avaient déjà été proposées et effectivement réalisées. Celui-ci mis au point, la zone de réponse linéaire de la cellule aurait toujours limité le facteur de commodité.

Or en étudiant théoriquement le simulateur en tant que système asservi et en étudiant d'autre part son mouvement dans le plan de phase, nous avions été peu à peu amenés à penser qu'il était possible de prévoir et calculer théoriquement les mouvements périodiques des équations non linéaires à coefficients crénelés, et ce quelle que soit l'amplitude des dits coefficients. C'est pourquoi, ayant la chance de pouvoir en disposer, nous nous sommes tournés vers les machines du Laboratoire de Calcul Analogique du Commissariat à l'Energie Atomique à Saclay, de façon à vérifier la théorie édifiée.

Nous allons donc maintenant étudier le simulateur en tant que système asservi, puis les questions concernant le simulateur étant définitivement épuisées, nous exposerons ensuite l'étude du mouvement de notre équation de Hill dans le plan de phase et enfin l'extension de cette méthode aux mouvements périodiques des équations non linéaires à coefficients crénelés d'amplitude quelconque.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VI

(1) SAUZADE - CRAS - 248, 1959, p. 205.

CHAPITRE VII

LES SYSTÈMES ASSERVIS A CŒFFICIENTS PÉRIODIQUES ET LE THÉORÈME DE FLOCQUET

VII-1 - LE SIMULATEUR CONSIDERE COMME SYSTEME ASSERVI.

Nous avons déjà indiqué en (I-1-1) que le simulateur utilisait les oscillations d'une boucle fermée (voir figure 53 ci-contre). En effet, prenons un axe arbitraire fixe passant par l'axe de rotation du galvanomètre. Soit ϑ_e l'angle constitué par l'axe de symétrie de la cellule photo-électrique (et solidaire de la cellule) avec cet axe arbitraire fixe. Soit ϑ_s l'angle constitué par le rayon lumineux tombant du galvanomètre sur la cellule avec ce même axe fixe. (Voir la figure 2).

Supposons les inverseurs immobiles et sur une des deux positions possibles. Le simulateur est alors équivalent au simple système asservi du second ordre de la figure 53. Le signal d'entrée ϑ_E est constitué par le mouvement éventuel de la cellule, soit par exemple un mouvement oscilla-

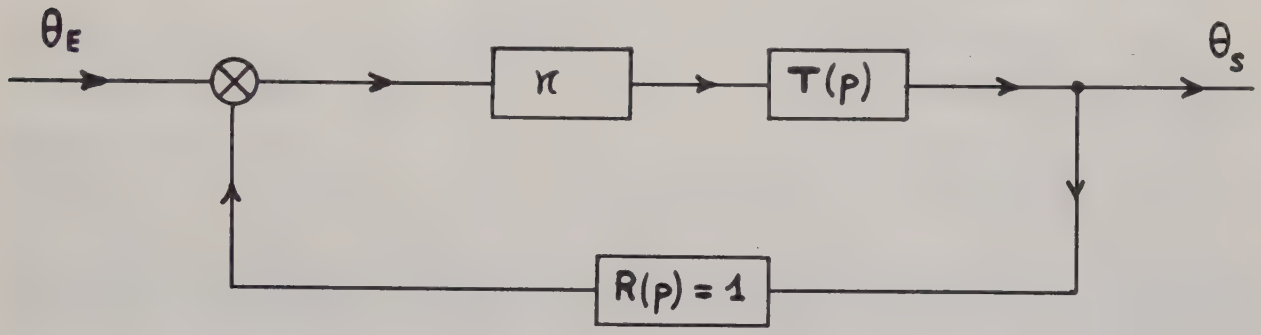


Fig. 53

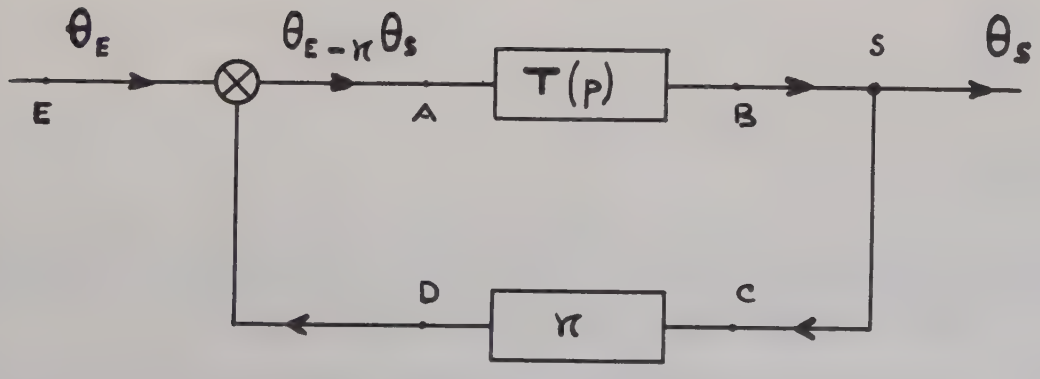


Fig. 54

toire volontaire, soit tout simplement un bruit de fond dû à des vibrations parasites toujours existantes. Le signal de sortie ϑ_s est constitué par le mouvement du spot lumineux par rapport à l'axe fixe. Le discriminateur est formé par la cellule photo différentielle elle-même. Le gain de la lampe électromètre est symbolisé par $\varkappa$ (les inverseurs sont immobiles). La fonction de transfert T (p) est égale à : $T(p) = 1/(p^2 + \alpha p + \lambda)$ tandis que la fonction de contre réaction R (p) est égale à R (p) = 1. Toutefois puisque pour la stabilité seule importe la boucle fermée, il est plus simple de prendre le schéma de la figure 54, où : $R(p) = \varkappa$.

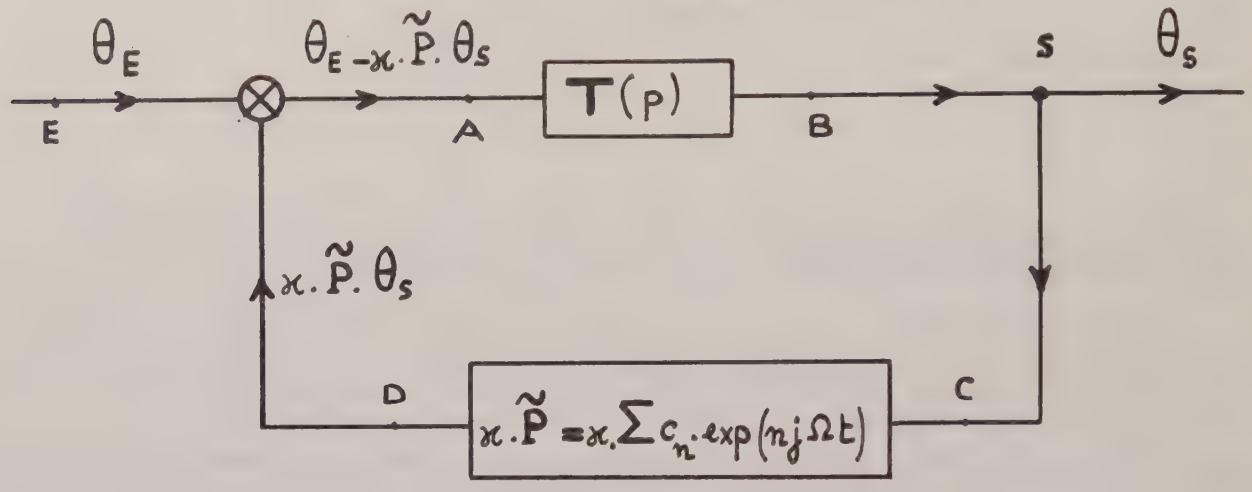


Fig. 55

Lorsque le simulateur marche, la fonction de contre-réaction R (p) = $\varkappa$, (cf. la figure 55), ne reste plus constante, les relais imposant une transformation périodique au signal en amont. La théorie des systèmes asservis ne semble donc plus valable, celle-ci supposant les systèmes à coefficients constants.

Nous avons été amenés à nous demander s'il n'était pas possible d'étudier la stabilité d'un tel système physique en tant que système bouclé. C'est ce que nous allons faire ici en suivant et en généralisant la méthode de la thèse de W.K. Linvill (1) celle-ci se limitant aux systèmes asservis pulsés avec calage ce qui amène des simplifications considérables. L'étude que nous allons faire s'applique par contre à un coefficient périodique quelconque. Pour la rapidité de l'exposé, nous supposons connue la théorie des systèmes asservis, particulièrement le critère de Nyquist-Cauchy. Pour le système bouclé à coefficients constants de la figure 54, la transformation de Laplace permet d'écrire :

$$T(p).\ \mathcal{L}\ (\vartheta_E - \varkappa\ .\ \vartheta_s) = \mathcal{L}\ (\vartheta_s) = \mathcal{L}\ (\vartheta_E - \varkappa\ .\ \vartheta_s) \Big/ (p^2 + \alpha\ p + \lambda)$$

soit :

$$(p^2 + \alpha\ .\ p + \lambda + \varkappa)\ \mathcal{L}\ (\vartheta_s) = \mathcal{L}\ (\vartheta_E)$$

relation équivalente pour $\vartheta_E = 0$, (au bruit de fond près) à l'équation

$$y'' + \alpha\ y' + (\lambda + \varkappa).\ y = 0$$

et le système asservi est instable si pour une entrée ϑ_E bornée (ou nulle) nous obtenons une sortie ϑ_S non bornée.

Pour nous en assurer, envoyons une entrée ϑ_E formée d'un spectre de fréquences élémentaires $\vartheta_{Ei} = \Phi_{Ei}\ .\ \exp(p_i t)$. La sortie est donc en général bornée sauf pour les valeurs p_i annulant le coefficient de ϑ_S dans l'équation et dont la partie réelle est positive en plus. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est que la fonction de transfert :

$$\frac{\mathcal{L}\ (\vartheta_s)}{\mathcal{L}\ (\vartheta_E)} = \frac{T\ (p)}{1 + \varkappa\ .\ T\ (p)}$$

ait tous ses pôles situés dans le demi plan complexe de gauche. Pour vérifier s'il en est bien ainsi, appliquons le théorème de Cauchy. Lorsque la variable complexe p décrit le contour d'exclusion du demi plan complexe de droite dans le sens direct, le nombre algébrique N de tours que fait autour de l'origine la fonction $(1 + \varkappa . T(p))$ est égal à : $N = Z - P$, Z et P étant le nombre de zéros et le nombre de pôles de la fonction $(1 + \varkappa . T(p))$ à l'intérieur du contour d'exclusion. Puisque précisément nous voulons qu'il n'y ait pas de zéros dans le demi plan de droite, il faut donc que :

$$N = O - P = - P$$

La courbe de Nyquist $\varkappa . T(p)$ doit donc décrire dans le sens inverse autant de tours autour du point (- 1) que la fonction $(1 + \varkappa . T(p))$ possède de pôles dans le contour d'exclusion du demi plan de droite

Mais dans le système physique du simulateur, le coefficient $\varkappa$ n'est plus constant. Nous avons au contraire une transformation $\tilde{\tilde{P}}$ périodique du signal ϑ_s dans la boucle de contre réaction, d'où le coefficient : $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \varkappa . \tilde{\tilde{P}}$, ($\tilde{\tilde{P}} = \tilde{\tilde{S}}$ = fonction créneau dans le cas du simulateur). Nous ne pouvons donc plus employer la transformation de Laplace pour exprimer la fonction de transfert, sinon il doit intervenir des convolutions :

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(\tau) . Y(p - \tau) . d\tau$$

puisque nous avons des produits $\tilde{\tilde{\varkappa}}(t) . y(t)$ dans l'équation. Cela nous mène en général à une équation intégrale. Il serait plus agréable de rechercher une transformation telle que la transformée d'un produit de fonctions donne un ou plusieurs produits algébriques. C'est le cas des séries de Fourier.

Au lieu donc de prendre des transformées de Laplace, recherchons directement ce que devient une entrée ϑ_E, formée d'un spectre d'une seule fréquence $\vartheta_E = \Phi_E . \exp.(pt)$. Essayons en somme de suivre le cheminement de cette entrée élémentaire et sa modification en amplitude et en fréquence.

Ce signal $\vartheta_E = \Phi_E . \exp.(pt)$ n'est pas modifié en fréquence mais en amplitude par la traversée de la chaine directe T (p). Par contre la boucle d'asservissement $\tilde{\tilde{\varkappa}}(t)$ modifie sa fréquence. En effet, posons : $\tilde{\tilde{\varkappa}}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n . \exp(nj\Omega t)$. Tout signal A. exp (pt) à l'entrée C de la chaîne de contre réaction (voir fig. 55) devient donc à la sortie D de cette chaîne de réaction : $\tilde{\tilde{\varkappa}} . A . \exp(pt) = \varkappa . \sum_{-\infty}^{+\infty} A . c_n . \exp((p + nj\Omega) t))$. Les signaux existant dans la boucle seront donc tous de la forme : $\exp((p + nj\Omega) t)$. Soit maintenant :

$$_s\Phi_K$$

l'amplitude du signal $\exp((p + Kj\Omega) t)$ à la sortie S. Cherchons la relation liant en S les différents signaux de même forme $\exp((p + Kj\Omega) t)$.

Un signal $_s\Phi_n . \exp((p + nj\Omega) t)$ entrant dans la chaîne de contre réaction en C (voir fig. 55) donne naissance à une multitude de signaux sortant en D :

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varkappa . {}_s\Phi_n . c_m . \exp(p + (n + m)j\Omega) t$$

Parmi ceux-ci, il en existe un en $\exp((p + Kj\Omega) t)$: celui pour lequel $m = K - n$ c'est-à-dire un signal ayant la forme :

$$\varkappa . {}_s\Phi_n . c_{K-n} . \exp((p + Kj\Omega) t)$$

c'est donc finalement le signal

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa . {}_s\Phi_n . c_{K-n} . \exp((p + Kj\Omega) t)$$

qui sera injecté de D dans le discriminateur à la sortie A duquel nous trouverons le signal :

$$\left\{ \delta_{0K} . {}_E\Phi_0 - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa . {}_s\Phi_n . c_{K-n} \right\} . \exp((p + Kj\Omega) t)$$

où le symbole δ_{0K} est le symbole de Kronecker, puisque pour K = 0 il faut tenir compte également du signal d'entrée original : $_E\Phi_0 . \exp.(pt)$.

L'ensemble du signal :

$$\left\{\delta_{0K} \cdot {}_{E}\Phi_0 - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa \cdot {}_{s}\Phi_n \cdot c_{K-n}\right\} \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)$$

"amplifié" dans la chaîne directe par l'opérateur T (p) est alors précisément égal au signal de sortie : ${}_{s}\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)$ cherché. Nous avons donc finalement la relation suivante :

$$\left\{\delta_{0K} \cdot {}_{E}\Phi_0 - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa \cdot {}_{s}\Phi_n \cdot c_{K-n}\right\} \cdot T\,(p + Kj\Omega) \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) = {}_{s}\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)$$

soit finalement

$$\left\{\delta_{0K} \cdot {}_{E}\Phi_0 - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa \cdot {}_{s}\Phi_n \cdot c_{K-n}\right\} \cdot T\,(p + Kj\Omega) = {}_{s}\Phi_K$$

Ceci est un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues ${}_{s}\Phi_n$ (voir Riesz (2)).

Soit Δ le déterminant général du système et Δ_K le mineur correspondant à ${}_{s}\Phi_K$, nous aurons pour une entrée : $\vartheta_E\,(p = j\omega) = {}_{E}\Phi_0 \cdot \exp(pt)$ la sortie suivante :

$$\vartheta_s\,(p, \Omega) = \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_{E}\Phi_0 \cdot \frac{\Delta_K}{\Delta} \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) = \sum_{K} \frac{\Delta_K}{\Delta} \cdot \vartheta_E\,(\omega + K\Omega)$$

Pour un signal d'entrée ayant un spectre : $\Theta_E\,(\omega) = \sum_i \vartheta_{Ei}\,(\omega_i)$ nous aurons donc un signal de sortie, ayant un spectre :

$$\Theta_s\,(\omega, \Omega) = \sum_i \sum_K \frac{\Delta_K}{\Delta} \cdot \vartheta_{Ei}\,(\omega_i + K\Omega)$$

Ainsi donc la stabilité du système asservi, donc de l'équation, sera déterminée par l'étude du déterminant infini Δ et en particulier par l'étude de son minimum.

Dans le cas des systèmes impulsionnels de W.K. Linvill, la matrice infinie se simplifie considérablement. En effet, les coefficients du développement de Fourier d'une suite périodique d'impulsions sont tous égaux à $\frac{\Omega}{2\pi}$. Par suite à la sortie du modulateur d'impulsions toutes les composantes différents de Ω ont même amplitude. Donc : ${}_{s}\Phi_i = {}_{s}\Phi_j$ et le système infini dégénère et se réduit à une seule équation :

$$\Phi_E = \Phi_s \left\{1 + \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \varkappa \sum_{-\infty}^{+\infty} T\,(p + Kj\Omega)\right\}$$

Dans le cas général nous retombons sur les difficultés d'application déjà connues du théorème de Floquet, qui mène lui aussi à des déterminants infinis (voir plus loin). Il y a vraisemblablement un lieu entre ce théorème et l'analyse que nous venons d'effectuer. En particulier il semblerait normal de pouvoir retrouver la forme de la solution, c'est-à-dire le théorème déjà cité. C'est ce que nous allons montrer.

VII-2 - FORME DES SOLUTIONS.

Reprenons la relation trouvée en S pour les termes en $\exp\left((p + jK\Omega)\, t\right)$ et appliquons là, à un système du deuxième ordre, pour lequel $T\,(p) = 1/p^2 + \alpha p + \lambda$. Il vient donc en supposant nulles toutes les composantes ${}_{E_i}\Phi_0$ du spectre d'entrée.

$$0 = {}_{s}\Phi_K \left\{(p + Kj\Omega)^2 + \alpha(p + jK\Omega) + \lambda\right\} \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varkappa \cdot c_{K-n} \cdot {}_{s}\Phi_n \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)$$

Faisons la somme de toutes ces relations, il vient :

$$\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_{s}\Phi_K \left\{(p + Kj\Omega)^2 + \alpha(p + Kj\Omega) + \lambda\right\} \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) + \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varkappa \cdot c_{K-n} \cdot {}_{s}\Phi_n \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\left\{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\}'' + \alpha\left\{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\}' + \lambda\left\{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\} +$$

$$+ \varkappa \cdot \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{K-n} \cdot {}_s\Phi_n \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right) = 0$$

Regardons d'un peu plus près la série double. Elle s'écrit en permutant l'ordre de sommation :

$$\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty}\left\{\exp((p + Kj\Omega)\, t)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{K-n} \cdot {}_s\Phi_n\right\} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left\{{}_s\Phi_n \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} c_{K-n} \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\} =$$

$$= \exp(pt) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=-\infty}\left\{{}_s\Phi_n \cdot \exp(nj\Omega t) \cdot \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} c_{K-n} \cdot \exp\left((K - n)\, j\Omega t\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left\{{}_s\Phi_n \cdot \exp\left((p + nj\Omega)\, t\right) \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m \cdot \exp(mj\Omega t)\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} {}_s\Phi_n \cdot \exp\left((p + nj\Omega)\, t\right)\right\} \cdot \left\{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m \cdot \exp(mj\Omega t)\right\}$$

on reconnaît dans la deuxième parenthèse la fonction périodique du début : $\tilde{P}(T)$.
et la relation s'écrit finalement :

$$\left\{\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\}'' + \alpha\left\{\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\}' + \lambda\left\{\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\} +$$

$$+ \varkappa \cdot \left\{\tilde{P}(T)\right\} \cdot \left\{\sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + Kj\Omega)\, t\right)\right\} = 0$$

En identifiant avec l'équation différentielle

$$y'' + \alpha \cdot y' + (\lambda + \varkappa \cdot \tilde{P}) \cdot y = 0$$

nous retrouvons la solution sous la forme de Floquet

$$y = \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp\left((p + jK\Omega)\, t\right) = \exp(pt) \cdot \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} {}_s\Phi_K \cdot \exp(jK\Omega t) = \tilde{\Phi} \cdot \exp(pt)$$

Inversement supposons que la solution de l'équation se mette sous la forme de Floquet :

$$y = \exp(\mu t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cdot \exp(jm\Omega t)$$

Nous obtenons sans difficulté

$$(\mu^2 + \alpha\mu + \lambda) \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cdot \exp(jm\Omega t) + (2\mu + \alpha) \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cdot (jm\Omega) \cdot \exp(jm\Omega t) +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cdot (-m^2\Omega^2) \cdot \exp(jm\Omega t) + \left\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot \exp(jn\Omega t)\right\} \cdot \left\{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cdot \exp(jm\Omega t)\right\} = 0$$

De cette relation nous pouvons tirer celle qui relie les amplitudes possédant la fréquence : $jK\Omega$. Soit :

$$\{\mu^2 + \alpha\mu + \lambda + (2\mu + \alpha)(jK\Omega) - K\Omega^2\} \cdot A_K + k = 0$$

où k représente la contribution du produit $(\Sigma) \cdot (\Sigma)$ aux termes en $\exp(jK\Omega t)$. Ces termes s'obtiennent lorsque les valeurs m et n des indices sont reliées par la relation $m + n = K$ d'où $k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot c_{K-n}$

et la relation :

$$\{(\mu + jK\Omega)^2 + \alpha . (\mu + jK\Omega) + \lambda\}. A_K + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{K-m} . A_m = 0$$

qui est celle que nous avons déjà trouvée.

VII-3 - CONCLUSION.

En résumé, nous avons pris une matrice colonne infinie

$$\| y(p) \| = \begin{Vmatrix} \exp(pt - Kj\Omega t) \\ \exp(pt + 0) \\ \exp(pt + Kj\Omega t) \end{Vmatrix}$$

à laquelle nous avons fait subir une transformation linéaire correspondant par exemple à :

$$y'' + \alpha . y' + (\lambda + \varkappa . \tilde{P}(T)). y = 0$$

c'est-à-dire, nous avons multiplié $\| Y(p) \|$ par une matrice infinie de transfert, $\| M(p) \|$ et nous avons obtenu : $\| M(p) \| . \| y(p) \|$
L'équation :

$$y'' + \alpha . y' + (\lambda + \varkappa . \tilde{P}). y = 0$$

s'écrit en ce cas :

$$\| M(p) \| . \| y(p) \| = 0$$

La condition pour trouver une solution à ce sytème est alors :

$$\text{Déterminant} (\| M(p) \|) = 0$$

Nous pouvons bien appliquer à cette fonction analytique, le critère de Nyquist-Cauchy.

Enfin analysant la matrice infinie $\| M(p) \|$ nous en avons déduit la forme de la solution générale en supposant le système bouclé sur lui-même avec une entrée nulle au bruit de fond près et par cette analyse nous avons précisément retrouvé le théorème de Floquet.

Concluons, les diverses méthodes sont strictement équivalentes et constituent simplement des langages différents plus ou moins simples, menant à des déterminants infinis d'étude généralement peu commode, à moins de se limiter dans leurs développements. L'analyse des systèmes asservis semble cependant mieux faire comprendre la raison physique des difficultés mathématiques rencontrées.

Toutefois dans le cas du simulateur, il nous faut bien reconnaître la supériorité de la méthode matricielle dûe à la forme crénelée des coefficients.

Nous allons maintenant étudier le mouvement dans le cadre du plan de phase, particulièrement les solutions périodiques, puis étendre ces considérations aux équations non linéaires à coefficients crénelés.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VII

(1) W.K. LINVILL - Sampled-Data Control Systems Studied Through Comparison of Sampling with Amplitude Modulation. A.I.E.E. Transactions, 1951, Vol 70, 1 779-1 788.

(2) RIESZ - Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Gauthier-Villars.

CHAPITRE VIII

LE PLAN DE PHASE ET LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES, DONT LES CŒFFICIENTS VARIENT SUIVANT UNE FONCTION CRÉNEAU

Nous proposons une méthode permettant de déterminer les solutions périodiques, lorsque les coefficients de l'équation non linéaire du deuxième ordre sont de la forme $\tilde{\tilde{a}} = a_1 + a_2 . \tilde{\tilde{S}}(T)$, a_1 et a_2 étant des constantes et $\tilde{\tilde{S}}(T)$ une fonction périodique crénelée quelconque mais pour simplifier nous prendrons pour $\tilde{\tilde{S}}(T)$ la fonction créneau ou fonction signe (+ 1, - 1, + 1, - 1) de période T, les "demi-périodes" étant supposées égales. La méthode ne fait aucune hypothèse sur l'importance des termes non linéaires.

La méthode tire son origine de l'étude du mouvement du simulateur dans le plan de phase. C'est pourquoi, après avoir exposé la méthode générale, nous commencerons par étudier comme premier exemple les solutions périodiques de notre équation (linéaire) de Hill et nous en donnerons quelques vérifications expérimentales. Puis pour deuxième exemple, nous prendrons l'équation non linéaire suivante :

$$y'' + [a_1 + a_2 . \tilde{\tilde{S}}(T)] . y + [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \tilde{\tilde{S}}(T)] . y^3 = 0$$

Nous déterminerons expérimentalement une solution périodique de cette équation et nous en donnerons une justification par un calcul théorique effectif.

VIII-1 - METHODE DE RECHERCHE DES SOLUTIONS PERIODIQUES.

Nous représenterons donc les phénomènes dans le plan de phase $\left(y ; y' = \frac{dy}{dt} = u\right)$ et nous supposons que l'on sache exprimer la fonction y (t) par une fonction tabulée, lorsque les coefficients crénelés $\tilde{\tilde{a}}_i$ sont remplacés par des constantes a_i. C'est en particulier le cas de l'équation non linéaire $y'' + \tilde{\tilde{a}} . y + \tilde{\tilde{\varepsilon}} . y^2 = 0$. L'équation adjointe à coefficients constants $y'' + a . y + \varepsilon . y^2 = 0$ a pour courbes de phase les cubiques $u^2 + ay^2 + \frac{2}{3} \varepsilon y^3 =$ cste et sa solution s'exprime au moyen des fonctions p (u). C'est aussi le cas de l'équation non linéaire $y'' + \tilde{\tilde{a}} y + \tilde{\tilde{\varepsilon}} . y^3 = 0$ (que nous prendrons plus loin pour exemple). L'équation adjointe $y'' + ay + \varepsilon y^3 = 0$ a pour courbes de phase, la famille des quartiques : $u^2 + ay^2 + \frac{\varepsilon}{2} . y^4 =$ cste et sa solution s'exprime au moyen des fonctions sn (u). Pour d'autres équations non linéaires, on sait expliciter analytiquement les courbes de phase de l'équation adjointe sans pour cela connaître sa solution au moyen de fonctions tabulées. C'est le cas par exemple des équations

$$y'' + \tilde{\tilde{a}} . y + \frac{\tilde{\tilde{b}}}{y - \tilde{\tilde{c}}} = 0 \text{ et } y'' + \frac{\tilde{\tilde{a}}}{y^2} + \frac{\tilde{\tilde{b}}}{y^3} = 0$$

En ce cas il faut graduer les courbes en temps, ce qui exige une quadrature. Si les courbes de phase ne s'explicitent pas analytiquement, il est toujours possible de les tracer point par point et de les graduer. La méthode proposée reste valable mais s'applique moins facilement.

Cela étant, nous allons tracer deux réseaux de courbes de phase. Le premier réseau sera tracé sur papier opaque et correspondra aux valeurs $a_{i+} = a_{i1} + a_{i2}$ des paramètres de l'équation lorsque $\tilde{\tilde{S}}(T) = + 1$. Choisissons une origine des temps sur l'axe des y par exemple et graduons chaque courbe en temps. Sur un papier transparent cette fois-ci, répétons cette opération pour les valeurs $a_{i-} = a_{i1} - a_{i2}$ correspondant à $\tilde{\tilde{S}}(T) = - 1$. Superposons le calque sur le papier opaque, fai-

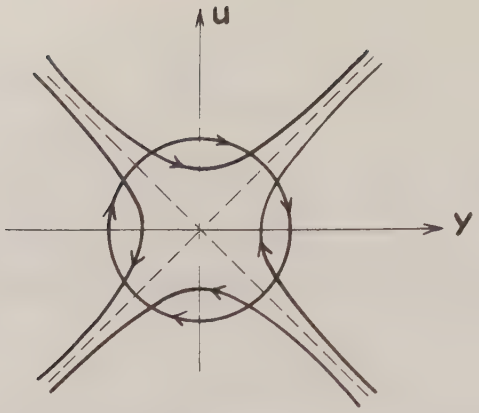


Fig. 56

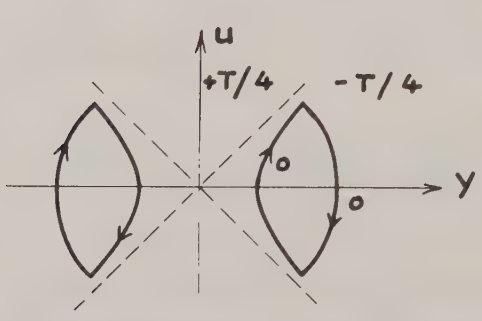


Fig. 57

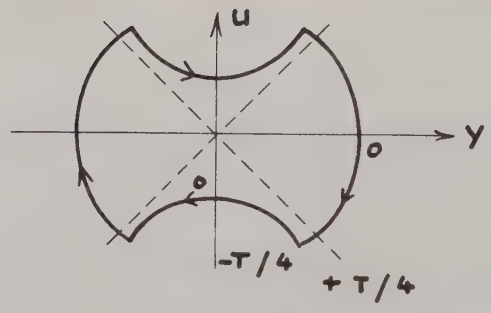


Fig. 58

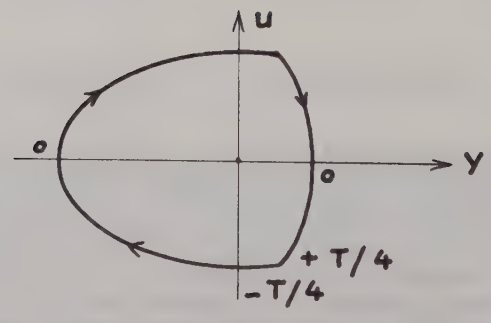


Fig. 59

sons coïncider les axes et recherchons des solutions périodiques de période T par exemple. Cela veut dire que nous devons trouver une courbe fermée, composée de deux parties, l'une sur le calque et du genre a_{i-} ; l'autre sur le premier réseau et du genre a_{i+}, chaque partie étant nécessairement parcourue pendant le temps T/2. Pour un cas de figure topologiquement identique à celui de la figure 57, les conditions d'existence d'une solution périodique de période T, s'écrivent en prenant l'origine des temps sur Oy pour y et pour u :

$$\begin{cases} y_+ (-T/4) = y_- (+T/4) \\ u_+ (-T/4) = u_- (+T/4) \end{cases}$$

Les mêmes conditions donnent les solutions périodiques de période 2T, à condition de prendre cette fois-ci (voir fig. 58) l'origine des temps sur Oy pour y et sur Ou pour $u = y'$.

Nous allons maintenant appliquer la méthode à l'équation de Hill-Meissner (linéaire par définition) ainsi qu'à l'équation plus générale $y'' + \tilde{a}y + \tilde{\varepsilon}\, y^3 = 0$.

VIII-2 - SOLUTIONS PERIODIQUES DE L'EQUATION. $y'' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}(T)] . y = 0$.

On sait qu'une telle équation possède des zones stables et des zones instables, fonctions de λ, $\varkappa$, T, la stabilité étant indépendante des conditions initiales et donnée par la condition :

$$-2 < 2 \cos\left(\frac{aT}{2}\right) . \cos\left(\frac{bT}{2}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) . \sin\left(\frac{aT}{2}\right) . \sin\left(\frac{bT}{2}\right) < +2$$

(avec $a = \sqrt{\lambda + \varkappa}$ et $b = \sqrt{\lambda - \varkappa}$).

Les valeurs limites + 2 et - 2 donnent les solutions périodiques de période T et 2T encadrant les zones stables.

Pour simplifier l'exposé nous partirons du cas le plus simple.

VIII-2-1 - Recherche des solutions périodiques.

VIII-2-1-1 - Cas $y'' + \tilde{\tilde{S}} . y = 0$.

Le cas le plus simple est celui de l'équation $y'' + \tilde{\tilde{S}}(T) . y = 0$, pour lequel les courbes de phase des équations adjointes sont des cercles $u^2 + y^2 = C^2$ et des hyperboles équilatères $u^2 - y^2 = \pm H^2$ (fig. 56), dont les équations paramétriques s'écrivent en prenant l'origine des temps sur Oy :

$$\begin{cases} y_c = C \cos t \\ u_c = -C \sin t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} y_H = H \operatorname{ch} t \\ u_H = H \operatorname{sh} t \end{matrix}$$

Une solution périodique de période T semble pouvoir correspondre au cas topologique de la figure 57 (ou de son symétrique par rapport à Ou). Les conditions de périodicité s'écrivent alors :

$$\begin{cases} y_H (T/4) = H . \operatorname{ch} (T/4) = C . \cos (-T/4) = y_c (-T/4) \\ u_H (T/4) = H . \operatorname{sh} (T/4) = -C . \sin (-T/4) = u_c (-T/4) \end{cases}$$

soit en divisant membre à membre :

$$\operatorname{th} (T/4) = \operatorname{tg} (T/4)$$

Un calcul simple montre que cette condition se ramène à la condition de Floquet :

$$\operatorname{ch} (T/2) . \cos (T/2) = +1.$$

Une solution périodique de période 2T semble pouvoir correspondre au cas topologique de la figure 58. Les conditions de périodicité s'écrivent alors, en prenant l'origine des temps sur Oy pour les cercles et sur Ou pour les hyperboles équilatères :

$$\begin{cases} y_c (-T/4) = C . \cos (-T/4) = H \operatorname{sh} (T/4) = y_H (T/4) \\ u_c (-T/4) = -C . \sin (-T/4) = H \operatorname{ch} (T/4) = u_H (T/4) \end{cases}$$

soit en divisant membre à membre :

$$\text{th}\,(T/4) = \text{cotg}\,(T/4)$$

Un calcul simple montre que cette condition se ramène à la condition de Floquet :

$$\text{ch}\,(T/2).\ \cos\,(T/2) = -\,1.$$

VIII-2-1-2 - Cas $y'' + \varkappa . \tilde{\tilde{S}} y = 0.$

Nous pouvons maintenant aborder le cas de l'équation $y'' + \varkappa . \tilde{\tilde{S}} y = 0$. Les courbes de phase des équations adjointes sont maintenant des ellipses $u^2 + \varkappa . y^2 = E^2$ et des hyperboles $u^2 - \varkappa y^2 = \pm H^2$. Topologiquement rien n'est changé et nous nous ramenons au cas précédent par une affinité sur y ou sur u, posant par exemple $\begin{cases} y = Y \\ u = \sqrt{\varkappa}\,.\ U \end{cases}$ mais alors t doit être remplacé par $\sqrt{\varkappa}\,.t$ et les conditions de périodicité s'écrivent maintenant :

pour (T) : $\text{th}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/4) = \text{tg}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/4)$ ou $\text{ch}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/2).\ \cos\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/2) = +1$

pour (2T) : $\text{th}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/4) = \text{cotg}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/4)$ ou $\text{ch}\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/2).\ \cos\,(\sqrt{\varkappa}.\ T/2) = -1$

VIII-2-1-3 : Cas $y'' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}].\ y = 0.$

Nous passons maintenant au cas plus général de l'équation : $y'' + [\lambda + \varkappa . \tilde{\tilde{S}}].y = 0$. Nous sommes amenés à distinguer trois cas suivant les valeurs respectives et le signe de λ et de $\varkappa$.

Dans le cas où : $\varkappa > \lambda > 0$ l'aspect topologique est le même que pour $\lambda = 0$ puisque les courbes de phase des équations adjointes sont encore des ellipses $u^2 + (\lambda + \varkappa).\ y^2 = E^2$ et des hyperboles $u^2 + (\lambda - \varkappa).y^2 = \pm H^2$ dont les équations paramétriques s'écrivent, en prenant l'origine des temps sur Oy :

$$\begin{cases} y_E = \dfrac{E}{\sqrt{\lambda+\varkappa}}\ .\ \cos\sqrt{\lambda+\varkappa}\ .\ t \\ u_E = -\,E.\ \sin\sqrt{\lambda+\varkappa}\ .\ t \end{cases} \qquad \begin{cases} y_H = \dfrac{H}{\sqrt{\varkappa-\lambda}}\ .\ \text{ch}\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ t \\ u_H = H.\ \text{sh}\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ t \end{cases}$$

Une solution périodique de période T correspondant topologiquement au cas de la figure 57 sera donc donnée par la condition :

$$\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ \text{tg}\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ T/4) = \sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ \text{th}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ T/4)$$

Un calcul simple montre que cette condition se ramène à la condition :

$$2\ \text{ch}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ T/2).\ \cos\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ T/2) + \left(\frac{\sqrt{\varkappa-\lambda}}{\sqrt{\varkappa+\lambda}} - \frac{\sqrt{\varkappa+\lambda}}{\sqrt{\varkappa-\lambda}}\right).\ \text{sh}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ T/2).\ \sin\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ T/2) = +2$$

elle-même équivalente à celle déjà indiquée au début du chapitre. Le calcul consiste à écrire la quantité :

$$\frac{\text{th}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ T/4)}{\text{tg}\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}\ .\ T/4)} - \frac{\text{tg}\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}.\ T/4)}{\text{th}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ T/4)}$$

à développer et à remplacer les tg et les th par les tg et les th des arguments et des arcs doubles.

Une solution périodique de période 2T correspondant topologiquement au cas de la figure 58 sera donnée par les conditions :

$$\begin{cases} y_E\ (-\,T/4) = \dfrac{E}{\sqrt{\varkappa+\lambda}}.\ \cos\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}\ .\ T/4) = \dfrac{H}{\sqrt{\varkappa-\lambda}}.\ \text{sh}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ T/4) = y_H\ (T/4) \\ u_E\ (-\,T/4) = -\,E.\ \sin\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}\ .\ (-\,T/4)) = H.\ \text{ch}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ T/4) = u_H\ (T/4) \end{cases}$$

soit en divisant membre à membre :

$$\sqrt{\varkappa+\lambda}.\ \text{tg}\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ T/4) = \sqrt{\varkappa-\lambda}\ .\ \text{coth}.\ (\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ T/4)$$

Condition équivalente à la condition

$$2\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\,T/2).\,\cos\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}\,.\,T/2)+\left(\frac{\sqrt{\varkappa-\lambda}}{\sqrt{\varkappa+\lambda}}-\frac{\sqrt{\varkappa+\lambda}}{\sqrt{\varkappa-\lambda}}\right).\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\,T/2).\,\sin\,(\sqrt{\varkappa+\lambda}\,.\,T/2)=-2$$

Dans le cas où $\lambda > \varkappa > 0$, l'aspect topologique est nécessairement très différent, puisque maintenant les courbes de phase des équations adjointes sont des ellipses, quel que soit le signe de $\tilde{S}$.

Une solution périodique de période T semble pouvoir correspondre aux cas des figures 59 ou 60. Les conditions de périodicité s'écrivent par exemple :

$$\begin{cases} y_1\,(-T/4) = \dfrac{E_1}{\sqrt{\lambda-\varkappa}}.\,\cos\,(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,(-T/4)) = -\dfrac{E_2}{\sqrt{\varkappa+\lambda}}.\cos\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,T/4) = y_2\,(T/4) \\ u_1\,(-T/4) = -E_1.\,\sin\,(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,(-T/4)) = +E_2.\,\sin\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,T/4) = u_2\,(T/4) \end{cases}$$

en divisant membre à membre, nous obtenons la condition, d'ailleurs valable pour les deux cas de figure :

$$\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,T/4) = -\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,T/4)$$

Condition bien entendu équivalente à celle déjà indiquée au début du chapitre pour les solutions périodiques de période T.

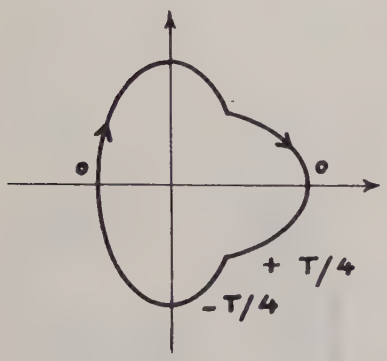


Fig. 60

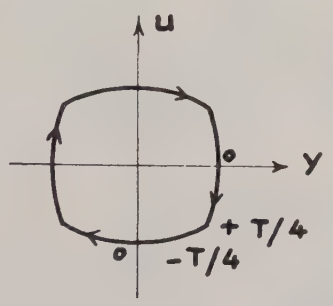


Fig. 61

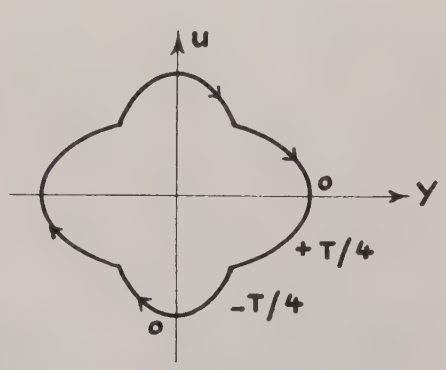


Fig. 62

Une solution périodique de période 2T semble pouvoir correspondre aux cas de figure 61 et 62. L'un des cas mène à la condition :

$$\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,T/4) = \sqrt{\lambda-\varkappa}.\,\cot\,(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,T/4)$$

L'autre cas mène à la condition :

$$\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\,T/4) = \sqrt{\lambda+\varkappa}.\,\mathrm{cotg}\,(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\,T/4)$$

Ces deux conditions se ramènent elles aussi à la condition générale du début.

Dans le cas où $\lambda < 0$, seul le cas $|\varkappa| > |\lambda| > 0$ semble possible. En effet si $|\lambda| > |\varkappa|$, les courbes de phase sont toujours des hyperboles, il semble donc difficile de trouver une configuration périodique et même une configuration stable (ce qui est effectivement le cas). Dans le cas $|\varkappa| > |\lambda| > 0$ nous retrouvons des configurations ellipses-hyperboles ; des solutions périodiques sont donc possibles. Pour une solution de période T, nous trouvons :

$$\sqrt{\lambda+\varkappa}\,.\ \mathrm{tg}\ (\sqrt{\lambda+\varkappa}\,.\ T/4) = \sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\ \mathrm{th}\ (\sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\ T/4)$$

et pour une solution périodique de période 2T :

$$\sqrt{\lambda+\varkappa}\,.\ \mathrm{tg}\ (\sqrt{\lambda+\varkappa}\,.\ T/4) = \sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\ \coth\ (\sqrt{\varkappa-\lambda}\,.\ T/4)$$

conditions équivalentes elles aussi aux conditions de périodicité T et 2T du début du chapitre.

Nous ne chercherons pas à trouver d'autres configurations périodiques (l'expérience nous a montré qu'il y en avait d'autres). Nous ne chercherons pas non plus à déterminer comment se fait le choix entre des configurations comme les figures 59 et 60 ou bien 61 et 62 qui nous semble devoir dépendre de la zone de stabilité (voir la vérification expérimentale).

Nous n'étudierons pas non plus le cas de l'équation avec amortissement (ou celui des créneaux dissymétriques), où les ellipses se transforment en spirales et les hyperboles en courbes à branches paraboles puissance.

Nous nous sommes contentés de faire quelques vérifications expérimentales avec et sans amortissement avant de passer au cas des équations non linéaires. Une étude systématique plus approfondie nous semblerait souhaitable.

VIII-2-2 - Vérification expérimentale.

Pour visualiser le plan de phase nous avons employé un enregistreur MECI à deux entrées X, Y, indépendantes. Horizontalement nous avons donc envoyé une tension proportionnelle à la tension correspondant à la quantité et verticalement une tension proportionnelle à la dérivée $\frac{dy}{dt} = y' = u$, en s'arrangeant toutefois pour obtenir le bon sens de rotation. Nous avons de plus construit pour chaque voie le dispositif auxiliaire de la figure 63 pour polariser l'enregistreur suivant les deux axes. De la sorte on obtient par les résistances R_3 le réglage de la position de l'origine des axes. Pour $y = y' = 0$ la plume enregistreuse doit se trouver au centre du domaine d'enregistrement. Les limites de ce dernier doivent être atteintes pour la valeur de saturation 100 volts, tant en y qu'en y'. Ce réglage de la sensibilité s'obtient par les résistances R_2. Les valeurs des potentiomètres sont de l'ordre de grandeur suivant : $R_1 \sim 5$ à $10\ M\Omega$; $R_2 \sim 0{,}1$ à $2\ K\Omega$; $R_3 \sim 100\ \Omega$; $R_4 \sim 150\ K\Omega$.

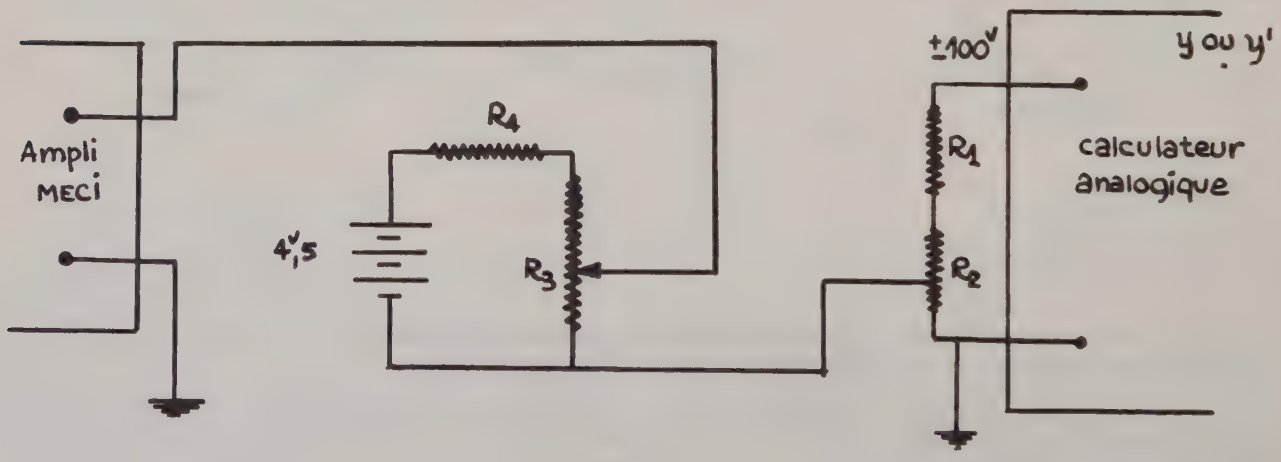


Fig. 63

VIII-2-2-1 - Equation sans amortissement.

Dans le cas de l'équation $y'' + (\lambda + \varkappa . \tilde{S}).\ y = 0$, nous avons obtenu un certain nombre de solutions périodiques, dont certaines ressemblent à celles prévues dans le paragraphe précédent. Par contre l'expérience nous a montré l'existence d'un certain nombre d'autres formes. La synthèse des différentes courbes enregistrées, périodiques ou non, nous a permis de suivre l'évolution de la forme des solutions périodiques le long des courbes limitant les premières zones de stabilité. Cette évolution est schématisée sur la figure 64.

Toutefois les solutions périodiques étant des cas limites, il nous a été assez difficile de les obtenir au début de notre étude, du fait de la dérive des amplificateurs et des lentes oscillations

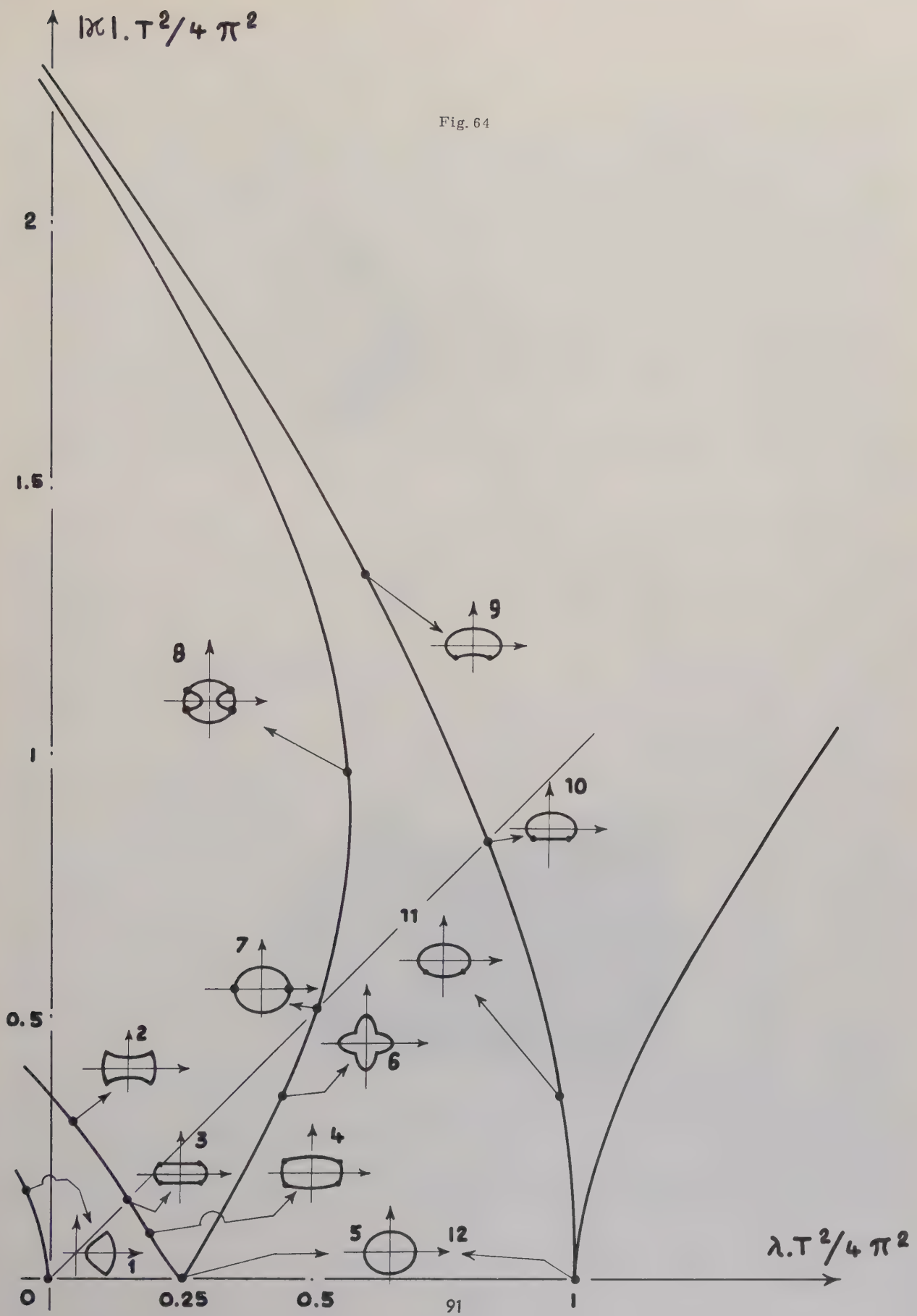


Fig. 64

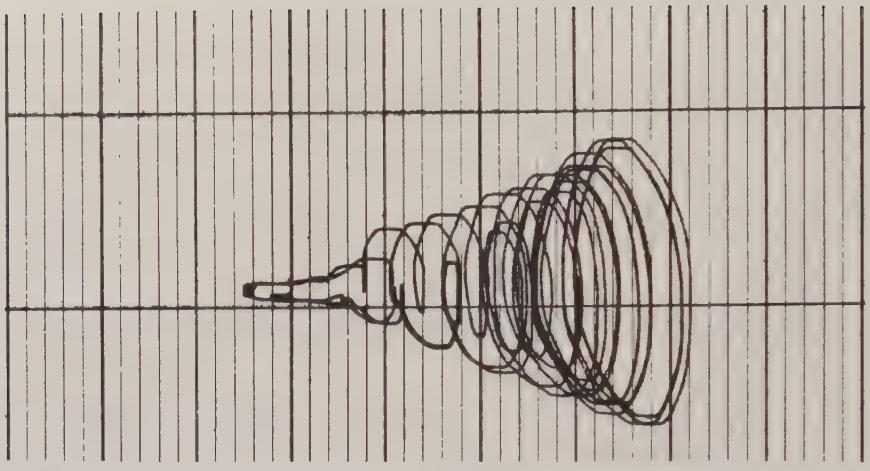


Fig. 65

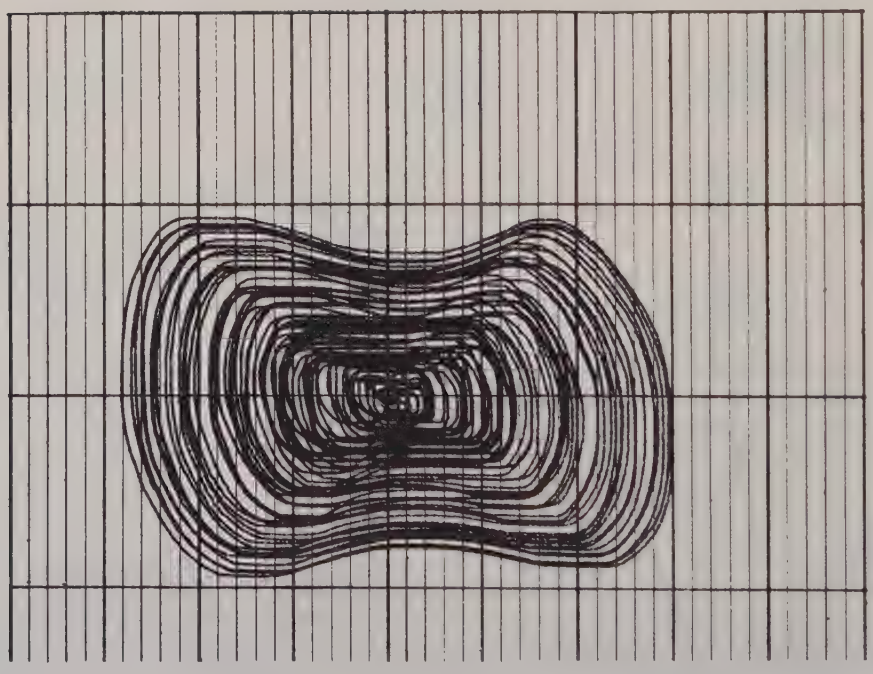


Fig. 66

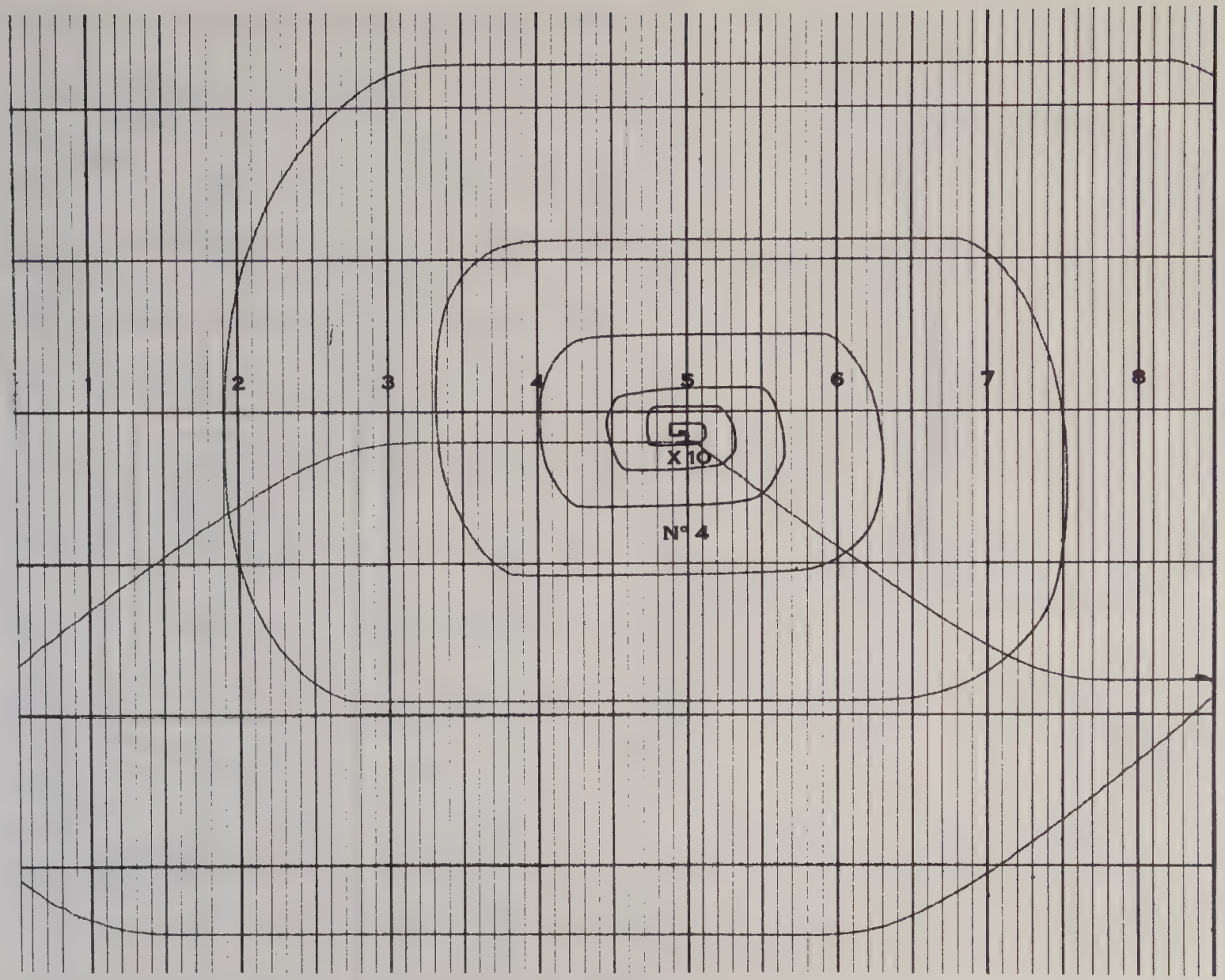


Fig. 67

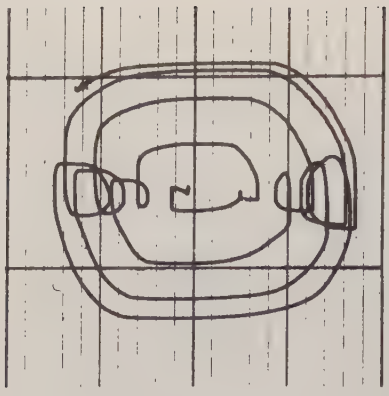


Fig. 68

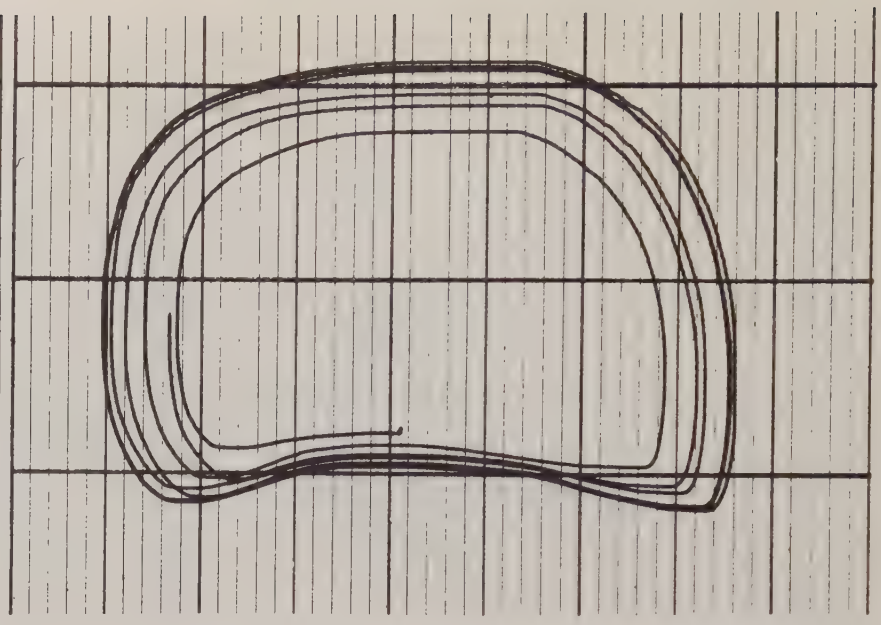


Fig. 69

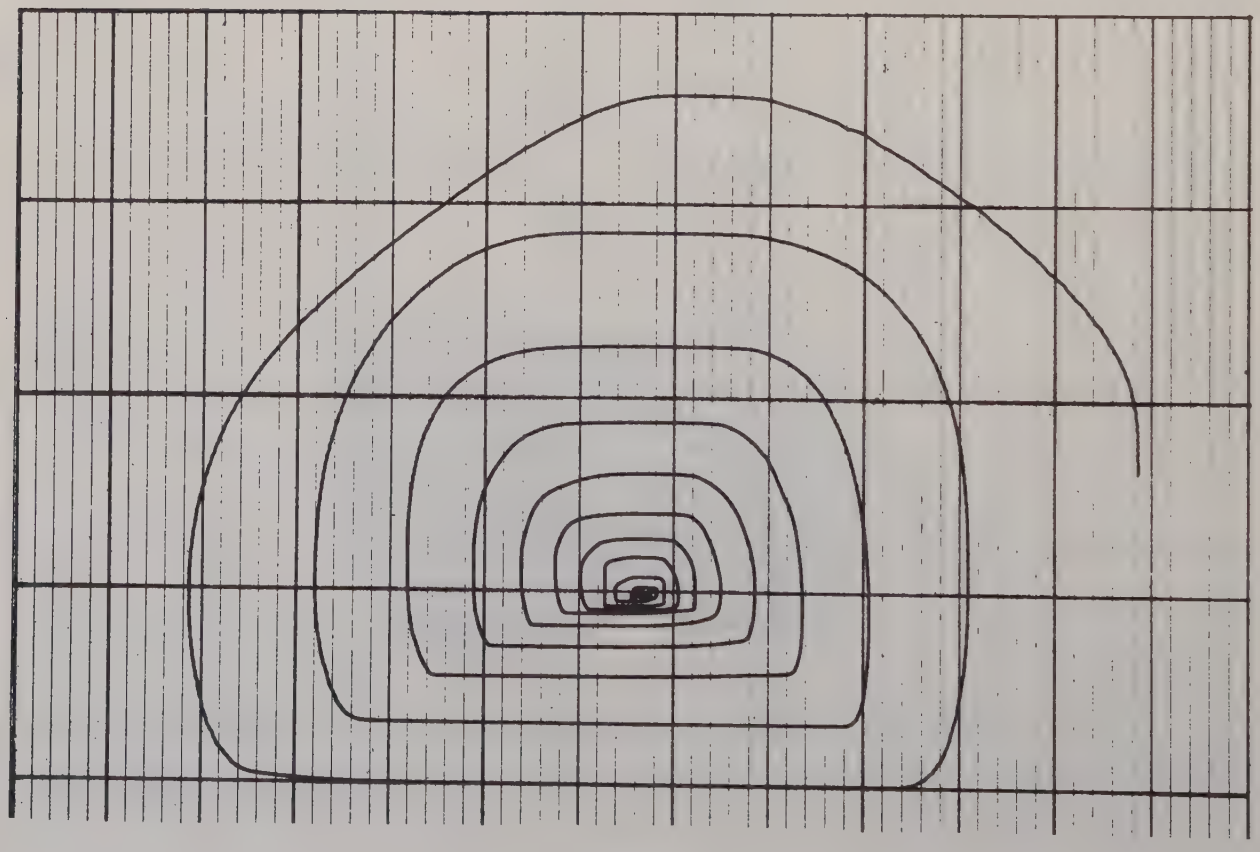


Fig. 70

transitoires de la période autour de sa valeur moyenne. Par la suite un réglage particulier de la dérive (voir le chapitre V) et un fonctionnement à $\alpha . T$ = Cste nous a permis d'obtenir des résultats plus nets pour l'équation avec amortissement. De plus l'enregistreur présente un certain nombre de défauts dus à l'inertie et aux seuils : pour des solutions parcourues à trop grande vitesse les ellipses tendent à se déformer et à s'aplatir suivant les bissectrices ; pour des courbes pas assez "pointues", il y a également tendance à l'écrêtage des extrêmes, les arrondis deviennent des méplats. De la sorte les points anguleux, qui jouent un grand rôle, s'adoucissent, tout particulièrement dans la configuration ellipse-ellipse. Tel qu'il est cet enregistreur nous a cependant rendu d'estimables services, mais pour ces différentes raisons les courbes que nous allons présenter doivent être considérées avec une certaine indulgence. Il eût été nécessaire de recommencer une étude systématique, qui nous eût certainement donné des résultats plus nets. Toutefois, tels qu'ils sont, ces enregistrements nous ont permis d'établir l'évolution des courbes de phase déjà indiquée figure 64, évolution que nous allons maintenant commenter.

La courbe de la limite gauche ($\lambda < 0$) de la première zone de stabilité correspond aux solutions périodiques de période T. La figure 65 le confirme et précise que leur forme topologique (cas n°1 de la figure 64) est celle de la figure 57.

Les courbes de la limite droite de la première zone correspondent par contre aux solutions périodiques de période 2 T, qui possèdent deux formes principales (cas n° 2 et cas n° 4 de la figure 64) séparées par le cas particulier n° 3. La figure 66 confirme la forme topologique du cas n° 2 qui correspond aussi à celui de la figure 58. Le cas intermédiaire n° 3 est situé sur la première bissectrice : les hyperboles se sont transformées en droite ($\lambda = \varkappa$ donc $y'' = 0$ donc $u =$ cste). La figure 67 représente une solution placée sur la première bissectrice au voisinage mais en dehors de la première zone stable, donc solution divergente. Le cas n°4 est déduit par continuité entre le cas n°3 et le cas n°5 qui correspond à une ellipse ordinaire pure et simple.

Les courbes de la limite gauche de la deuxième zone de stabilité correspondent elles aussi à des solutions périodiques de période 2T (cas n°6, 7, 8). Les cas n°4 (zone n°1) et n°6 sont difficiles à distinguer, ils mènent d'ailleurs à la même condition de périodicité. Par continuité l'évolution nous semble devoir être (3, 4, 5, 6, 7) plutôt que (3, 6, 5, 4, 7). Le cas intermédiaire n°7 sur la première bissectrice nous semble devoir être une ellipse avec deux points d'arrêt sur Oy. Les points d'arrêt se transforment ensuite en hyperboles pour donner le cas n°8, que nous n'avions pas prévu théoriquement. La figure 68 correspond à une solution de ce genre, située légèrement à l'intérieur de la deuxième zone stable.

Les courbes de la limite droite de la deuxième zone de stabilité correspondent aux solutions périodiques de période T. Les deux formes principales correspondent aux cas n°9 et n°11. La figure 69 montre une solution voisine du cas n°9. La figure 70 nous montre une solution placée sur la première bissectrice au voisinage mais en dehors de la zone stable, c'est-à-dire voisine du cas n°10. Le cas n°11 nous semble la suite logique des cas n°9 et 10. Le cas n°12 correspond à une ellipse normale pure et simple.

Pour les courbes de la limite gauche de la troisième zone, nous avons bien relevé quelques points lors de la vérification du diagramme universel de la figure 48, mais ces points n'ont pas été étudiés au point de vue du plan de phase.

Pour terminer signalons la courbe de la figure 71, obtenue par hasard, et qui soulève la question de l'existence de solutions multipériodiques. Ce cas correspond à notre avis à un exposant μ imaginaire pur rationnel. Malheureusement la courbe expérimentale n'a pas été tarée.

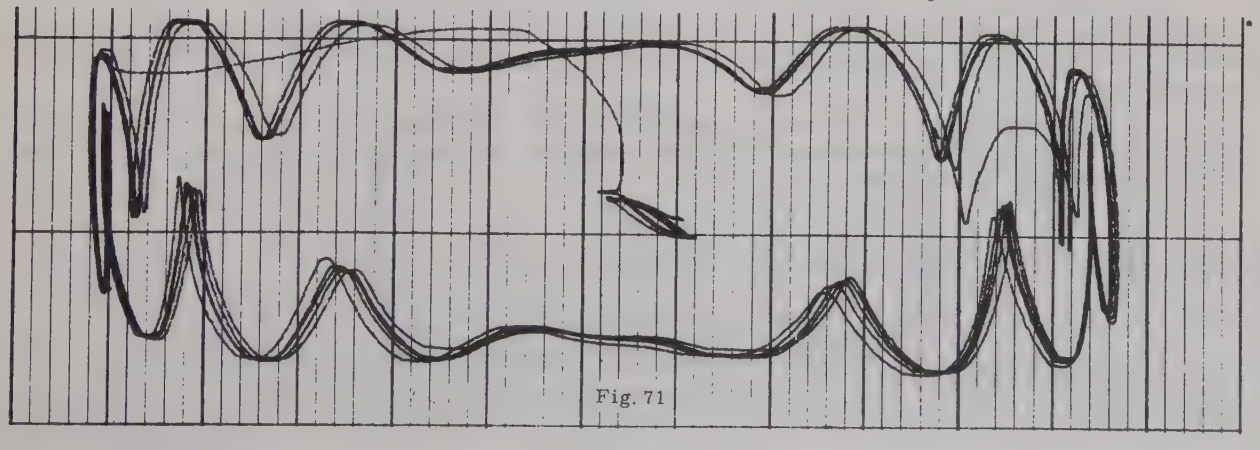


Fig. 71

Montrons maintenant que les trois nouveaux cas généraux de figure trouvés expérimentalement (cas n°8, 9 et 11) redonnent la condition du début du chapitre. Pour le cas n°8, les équations paramétriques s'écrivent :

$$\begin{cases} y_E = \dfrac{E}{\sqrt{\lambda+\varkappa}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \\ u_E = E.\ \cos\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_H = \dfrac{H}{\sqrt{\varkappa-\lambda}} \cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ t\right) \\ u_H = H.\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ t\right) \end{cases}$$

D'où la condition de périodicité :

$$\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\varkappa+\lambda}.\ T/4\right) = -\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ \coth\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ T/4\right)$$

qui redonne elle aussi la condition déjà connue.

Pour le cas n°9 les équations paramétriques s'écrivent :

$$\begin{cases} y_E = \dfrac{E}{\sqrt{\lambda+\varkappa}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \\ u_E = E.\ \cos\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_H = \dfrac{H}{\sqrt{\varkappa-\lambda}} \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ t\right) \\ u_H = -H.\ \mathrm{ch}\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ t\right) \end{cases}$$

D'où la condition de périodicité :

$$\sqrt{\varkappa-\lambda}.\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ T/4\right) = -\sqrt{\varkappa+\lambda}\ \ \mathrm{th}\left(\sqrt{\varkappa-\lambda}\ \ T/4\right)$$

qui redonne elle aussi la condition déjà indiquée.

Pour le cas n°11, les équations paramétriques s'écrivent :

$$\begin{cases} y_{E1} = -\dfrac{E_1}{\sqrt{\lambda-\varkappa}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\ t\right) \\ u_{E1} = -E_1.\ \cos\left(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\ t\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{E2} = \dfrac{E_2}{\sqrt{\lambda+\varkappa}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \\ u_{E2} = E_2.\ \cos\left(\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ t\right) \end{cases}$$

D'où la condition de périodicité :

$$\sqrt{\lambda-\varkappa}.\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\ T/4\right) = -\sqrt{\lambda+\varkappa}.\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda-\varkappa}.\ T/4\right)$$

qui redonne elle aussi la condition connue.

VIII-2-2-2 - Equation avec amortissement.

Dans le cas de l'équation $y'' + \alpha.y' + (\lambda + \varkappa.\ \tilde{\tilde{S}})\, y = 0$ les courbes de phase des équations adjointes se déforment du fait de l'amortissement. Celui-ci introduit d'ailleurs un facteur favorable pour la stabilité orbitale des solutions périodiques (voir fig. 48 le resserrement des courbes αT = cste quand αT = cste tend vers $\alpha T = 0$). Nous avons pris αT = cste = 3 et relevé quelques solutions périodiques. La figure 72 correspond au cas n°2.

La figure 73 a et b correspondant au même cas est intéressante : λ, $\varkappa$ et T étant choisis pour obtenir une solution périodique, le calcul démarre pour $\tilde{\tilde{S}} > 0$ dans le cas a et pour $\tilde{\tilde{S}} < 0$ dans le cas b. Les courbes obtenues ont même forme et semblent homothétiques aux défauts près de l'enregistreur.

Nous avons limité là nos vérifications expérimentales. Une étude plus systématique nous semblerait très souhaitable. Mais tournés vers les solutions périodiques des équations non linéaires, nous ne l'avons pas entreprise.

VIII-3 - SOLUTIONS PERIODIQUES DE L'EQUATION : $y'' + \tilde{\tilde{a}}.y + \tilde{\tilde{\varepsilon}}.y^3 = 0$.

VIII-3-1 - Courbes de phase des équations adjointes.

Il est nécessaire d'étudier au préalable les courbes de phase de l'équation adjointe $y'' + ay + \varepsilon\, y^3 = 0$. Celle-ci s'intègre à vue et donne les quartiques : $u^2 + ay^2 + \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot y^4 = \text{cste} = 2K$.

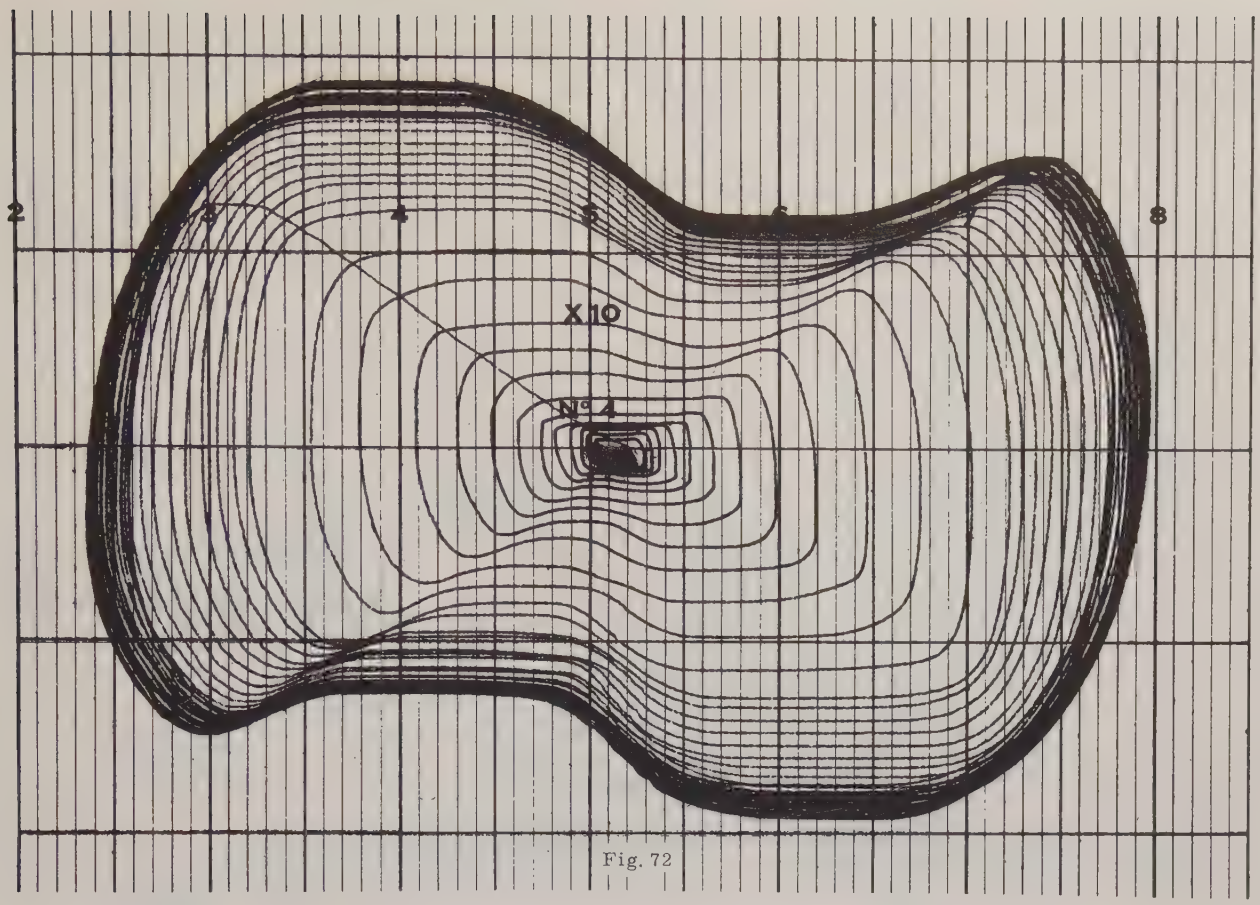


Fig. 72

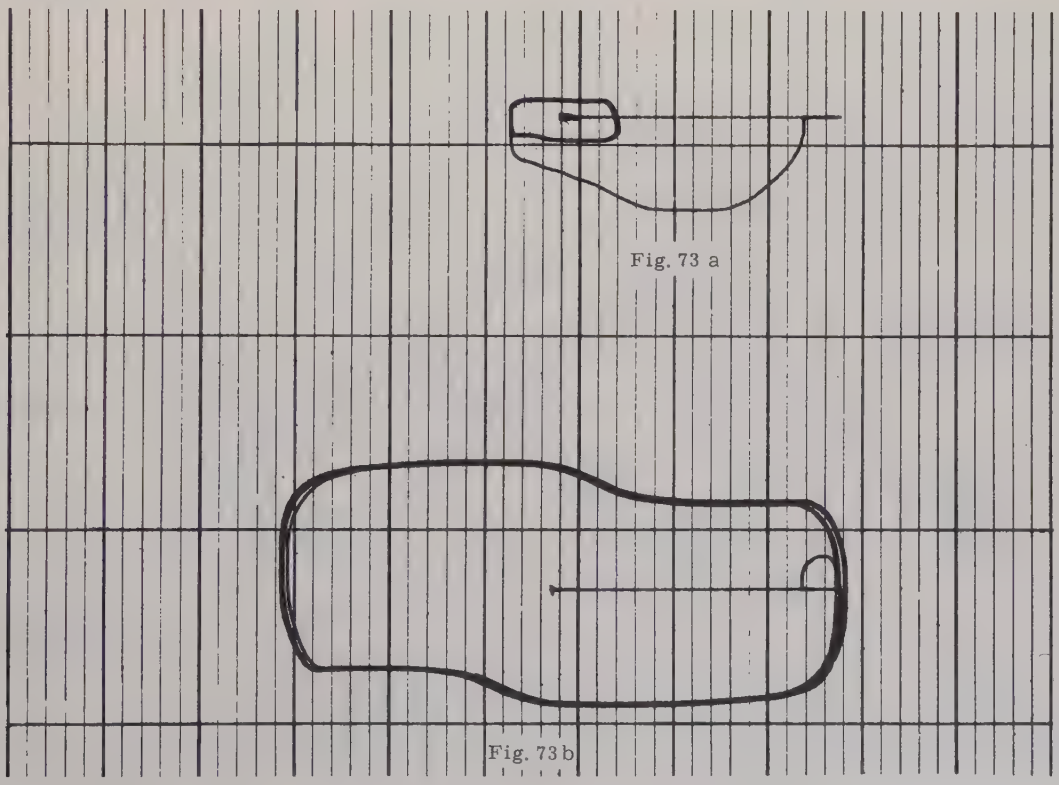


Fig. 73 a

Fig. 73 b

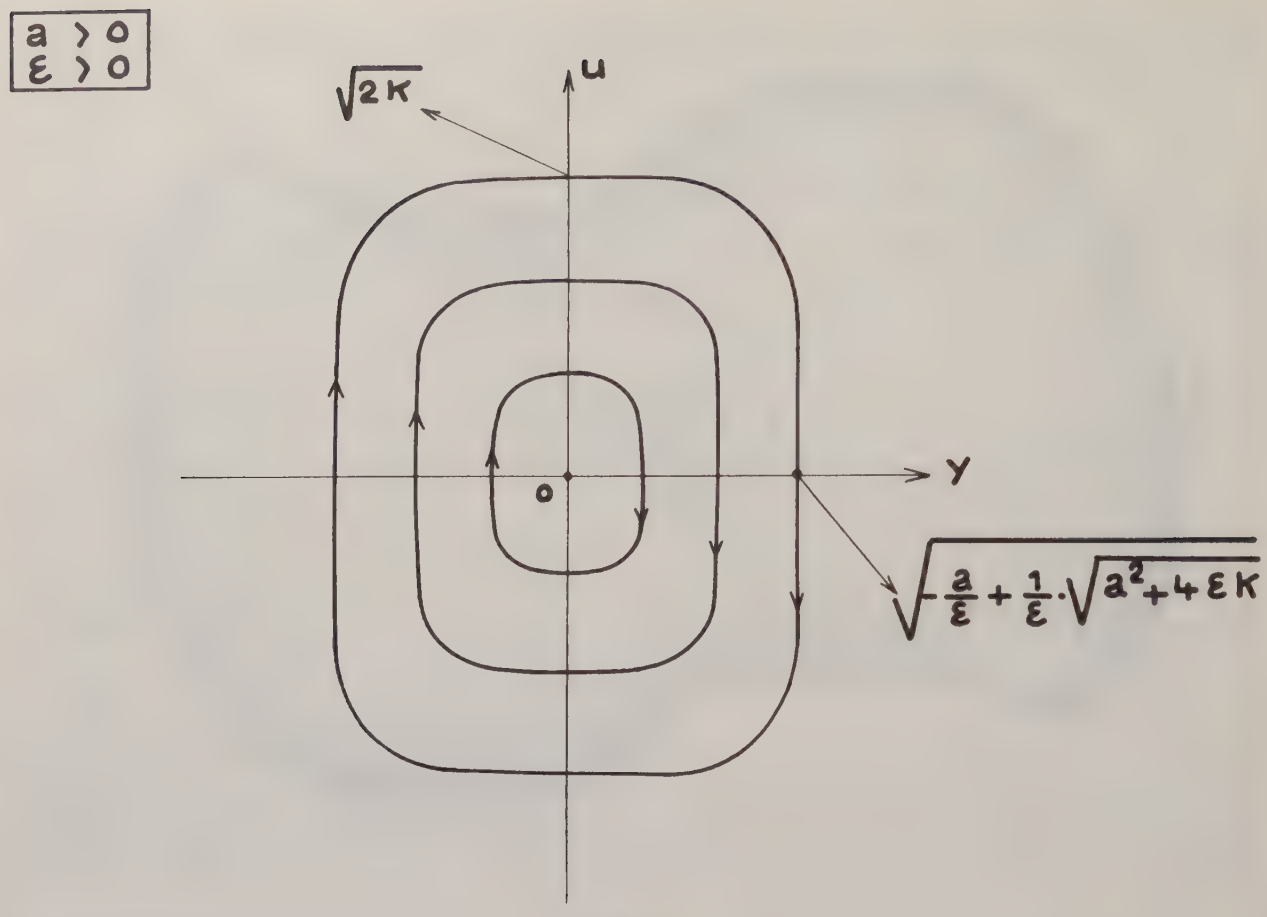

a > 0
ε > 0
√2K
u
y
o
$\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{a^2+4\varepsilon K}}$

Fig. 74

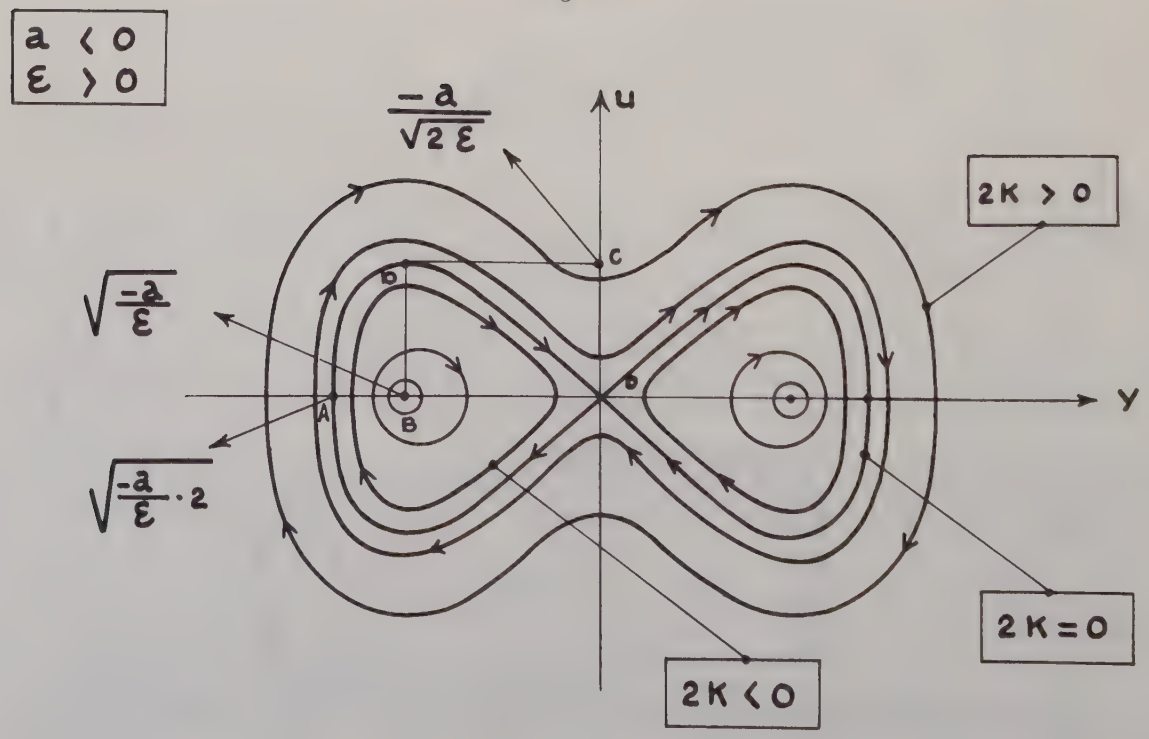

a < 0
ε > 0
$\frac{-a}{\sqrt{2\varepsilon}}$
u
2K > 0
c
b
$\sqrt{\frac{-a}{\varepsilon}}$
a
A
B
y
$\sqrt{\frac{-a}{\varepsilon}\cdot 2}$
2K = 0
2K < 0

Fig. 75

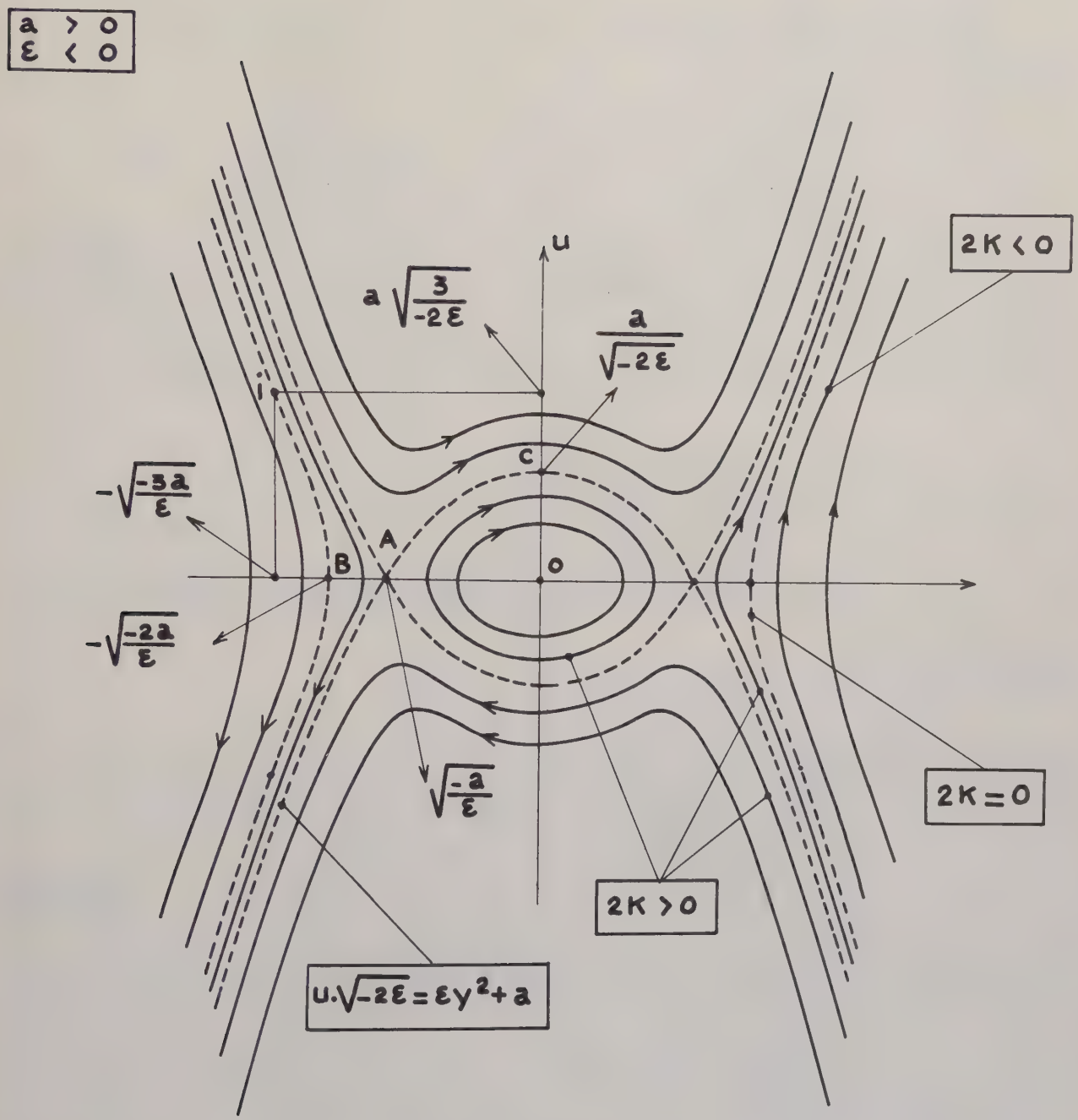

a > 0
ε < 0
u
$a\sqrt{\frac{3}{-2\varepsilon}}$
$\frac{a}{\sqrt{-2\varepsilon}}$
2K < 0
C
$-\sqrt{\frac{-3a}{\varepsilon}}$
A
B
O
$-\sqrt{\frac{-2a}{\varepsilon}}$
$\sqrt{\frac{-a}{\varepsilon}}$
2K = 0
2K > 0
$u.\sqrt{-2\varepsilon} = \varepsilon y^2 + a$

Fig. 76

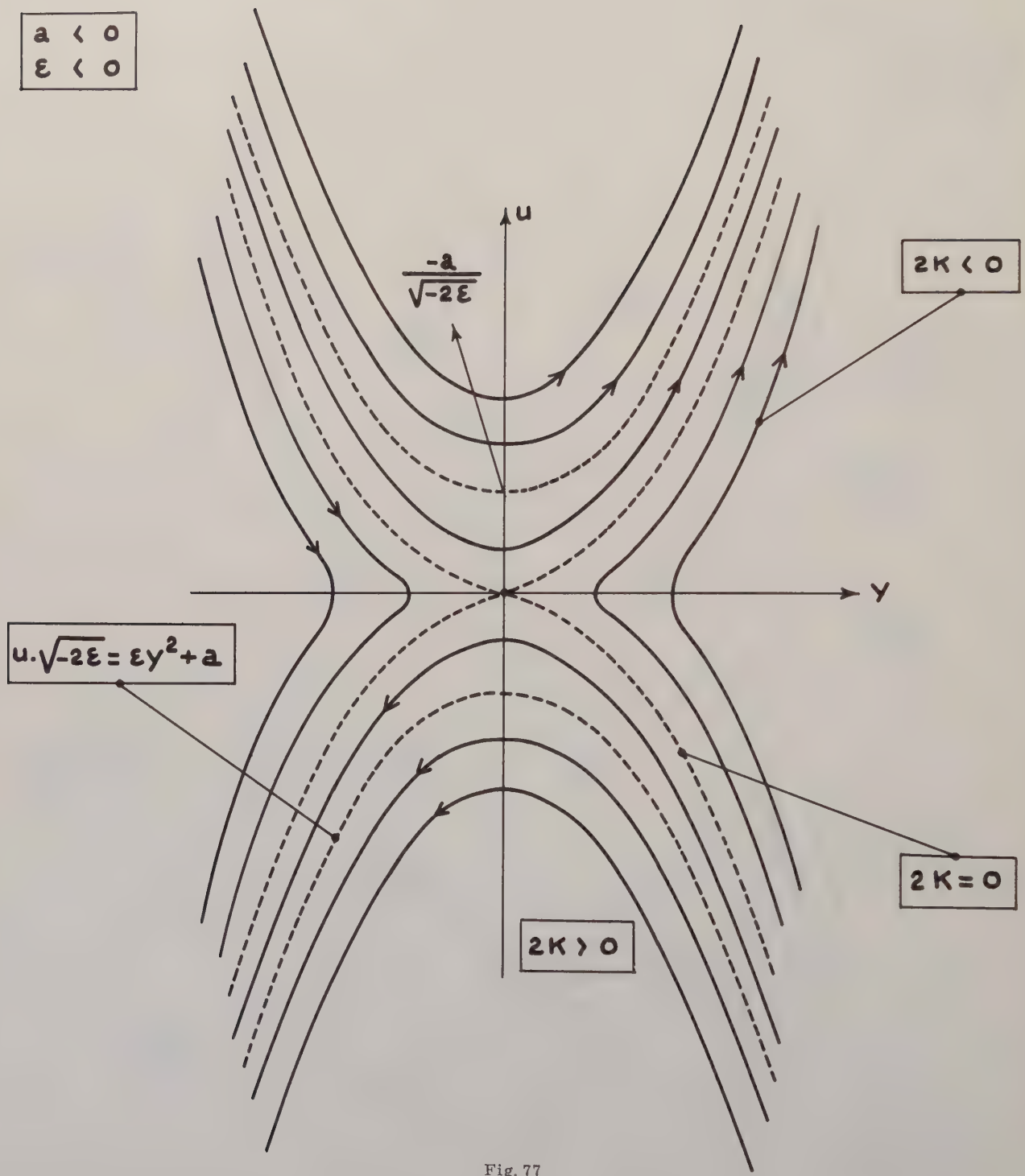


Fig. 77

L'étude de ces courbes est longue mais ne présente pas de difficulté. Il y a 4 cas possibles d'après le signe de a et de ε. Le tableau suivant résume la situation.

ε \ a	-	+
-	Toutes les courbes possèdent des branches infinies : il y a toujours instabilité	Les courbes autour de l'origine sont fermées : les autres présentent des branches infinies : il y a stabilité conditionnelle C.N.S.: $u_o^2 + a.y_o^2 + \frac{\varepsilon}{2} y_o^4 = 2K < \frac{a^2}{-2\varepsilon}$
+	Toutes les courbes sont fermées : il y a toujours stabilité	Toutes les courbes sont fermées : il y a toujours stabilité

Les figures 74 - 75 - 76 - 77 reproduisent l'allure des quatre cas possibles. Pour le cas ($a > 0$; $\varepsilon > 0$) (fig. 74) il n'y a aucun point d'inflexion. Pour le cas ($a < 0$; $\varepsilon > 0$) (fig. 75) il n'y a pas de point d'inflexion pour les ovales ($2K < 0$) intérieur à l'ovale particulier $2K = 0$; pour les autres courbes ($2K > 0$) il existe un point d'inflexion par quadrant. Pour le cas ($a > 0$; $\varepsilon < 0$) (fig. 76) il n'y a pas de point d'inflexion pour les ovales autour de l'origine ; pour chaque autre type de courbe (3 autres) il existe un point d'inflexion dans chaque quadrant. Pour le cas ($a < 0$; $\varepsilon < 0$) (fig. 77) il n'existe pas de point d'inflexion pour les courbes ($2K > 0$) ; pour les courbes ($2K < 0$) extérieures à la courbe ($2K = 0$) il existe un point d'inflexion pour chaque quadrant.

VIII-3-2 - Vérification expérimentale des courbes de phase de l'équation adjointe.

Nous avons vérifié par la machine analogique l'allure générale des quatre cas et effectué des vérifications quantitatives dans les deux cas ($a > 0$; $\varepsilon < 0$) et ($a < 0$; $\varepsilon > 0$) où apparaissent des points remarquables aisément repérables (en principe) et facilement calculables.

Dans le cas ($a > 0$; $\varepsilon < 0$), nous avons pris l'équation suivante : $y'' + 0,63\,y - 0,0462\,y^3 = 0$ et nous avons calculé les points d'intersection des paraboles avec les axes (voir la fig. 75). Avec les échelles choisies l'expérience et le calcul donnent :

Point A : { y théorique $= \sqrt{\frac{-a}{\varepsilon}} \# 3,69 \sim 4,25$ cm ; y expérimental $4\text{ cm} < y < 5,2$ cm

L'imprécision provient de la difficulté d'obtenir expérimentalement les courbes remarquables (paraboles) qui sont des courbes limites, mais le résultat théorique semble effectivement s'accorder avec la valeur expérimentale la plus probable par extrapolation.

Point C : { u théorique $= \frac{a}{\sqrt{-2\varepsilon}} \# 2,07 \sim 2,38$ cm ; u expérimental $\sim 2,25$ cm

Dans le cas ($a < 0$; $\varepsilon > 0$), nous avons pris l'équation suivante : $y'' - 0,3405\,y + 0,0125\,y^3 = 0$ et nous avons calculé les points remarquables de l'ovale $2K = 0$ (voir la fig. 76). Le calcul et l'expérience donnent :

Point A : { y théorique $= \sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}.\sqrt{2} \# 7,4 \sim 8,48$ cm ; y expérimental $8,4\text{ cm} < y < 8,6$ cm

Point B : { y théorique $= \sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}} \# 5,23 \sim 6$ cm ; y expérimental $\sim 6,15$ cm

Point C : { u théorique $= \frac{-a}{\sqrt{2\varepsilon}} \# 2,2 \sim 2,53$ cm ; u expérimental $\sim 2,35$ cm

Les résultats expérimentaux sont donc en accord avec les résultats théoriques et même en bon accord, sauf pour les quantités en u. Ce fait, général, est dû à l'enregistreur, qui a tendance à écrêter lorsque la dérivée du mouvement devient faible.

VIII-3-3 - Recherche expérimentale d'une solution périodique de l'équation crénelée non linéaire $y'' + \overset{\frown}{a}y + \overset{\frown}{\varepsilon} y^3 = 0$.

Guidés par les idées et les résultats qui précèdent, nous avons donc cherché expérimentalement une solution périodique de l'équation non linéaire crénelée : $y'' + \overset{\frown}{a}y + \overset{\frown}{\varepsilon}.y^3 = 0$. Pour cela nous avons cherché par inspection graphique, les combinaisons semblant pouvoir mener à des solutions périodiques de période T ou 2T. Ces combinaisons semblent encore plus nombreuses que dans le cas linéaire, ce qui paraît normal. Nous ne nous attarderons pas dans ce domaine assez incertain où une recherche systématique nous apparaît encore plus nécessaire que dans le cas linéaire.

Nous nous sommes contentés de rechercher une solution périodique de période T en essayant d'obtenir une courbe d'allure la plus éloignée possible de l'allure des courbes de phase linéaires . Une courbe du genre de celle de la figure 78 nous a semblé répondre à la question.

L'expérience a été effectuée sur la machine analogique DJINN déjà décrite, le produit $\overset{\frown}{S}y$ et le triple produit $\overset{\frown}{S}y^3$ étant effectués par des multiplieurs électroniques de précision "ELECTRONIC ASSOCIATES". Le générateur très basse fréquence "C.R.C." et le périodemètre servent à créer un créneau bien symétrique. Le schéma analogique adopté est celui de la figure 79. En ce qui concerne les équations machine nous supposons qu'à une seconde de temps réel ordinaire t de l'équation proposée, il correspond K secondes du "temps machine" τ . Soit $\tau = K.t$. L'équation devient donc :

$$K^2.\frac{d^2y}{d\tau^2} + [a_1 + a_2.\overset{\frown}{S}].\ y + [\varepsilon_1 + \varepsilon_2.\overset{\frown}{S}].\ y^3 = 0$$

Maintenant établissons le tableau de correspondance suivant :

variable	y	$\longleftrightarrow$	tension V_o	volt
"	y'	$\longleftrightarrow$	" V_1	volt
"	y''	$\longleftrightarrow$	" V_2	volt
"	S	$\longleftrightarrow$	" U	volt

Précisons encore les correspondances. Par exemple disons que pour $y = 10$, $V_o = \alpha$ volt et posons S égal à l'unité pour $U = \beta$ volt. En se rappelant qu'à tout produit de fonction xy il correspond en réalité, en volt, aux bornes de sortie du multiplieur le produit : $\frac{XY}{100}$ et non XY (et ce pour éviter toute saturation), nous obtenons alors aux bornes de l'entrée du premier intégrateur (voir la fig. 79) la relation suivante :

$$0 = V_2 + A_1.V_o + A_2.\frac{UV_o}{100} + E_1.\frac{V_oV_o}{100}.\frac{V_o}{100} + E_2\frac{V_oV_o}{100}\frac{V_o}{100}.\frac{U}{100}$$

Mais d'après la correspondance définie plus haut, nous avons $V_o = y.\left(\frac{\alpha}{10}\right)$, d'où l'équation machine . $\left(V_2 = \frac{d^2}{d\tau^2}(V_o)\right)$:

$$0 = \frac{d^2y}{d^2\tau} + A_1.\ y + \frac{A_2}{100}.\ \beta\ .\overset{\frown}{S}.y + E_1.\ \left(\frac{\alpha}{10}\right)^2.\ \frac{1}{(10)^4}\ .\ y^3 + E_2\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2.\ \frac{\beta}{(10)^6}\ .\ \overset{\frown}{S}.\ y^3$$

D'où les relations machines :

$$A_1.K^2 = a_1 \qquad E_1 = \frac{\varepsilon_1}{K^2}.\frac{10^6}{\alpha^2}$$

$$A_2 = \frac{a^2}{K^2}.\frac{100}{\beta} \qquad E_2 = \frac{\varepsilon_2}{K^2}.\frac{10^8}{\alpha^2.\beta}$$

Pour des raisons de simplicité nous avons pris $A_1 = E_1 = 0$. Les autres coefficients ont été choisis, tels que les points remarquables des courbes de phase de l'équation adjointe soient bien repérables et surtout de manière à obtenir sur l'enregistreur une courbe parcourue d'une manière suf-

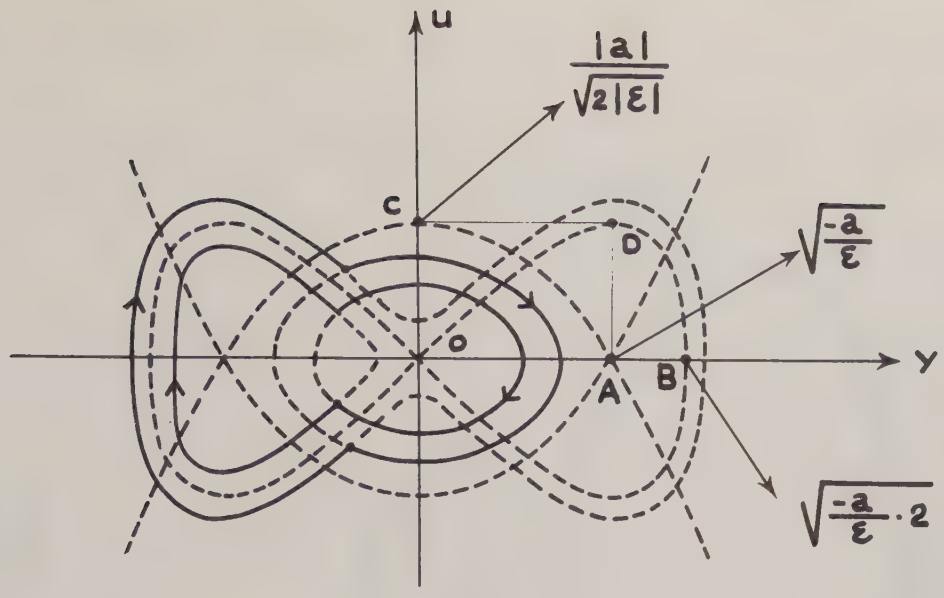


Fig. 78

schéma : $y'' + (a_1 + a_2 \overbrace{S}^{mm}).y + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \overbrace{S}^{mm}).y^3 = 0$

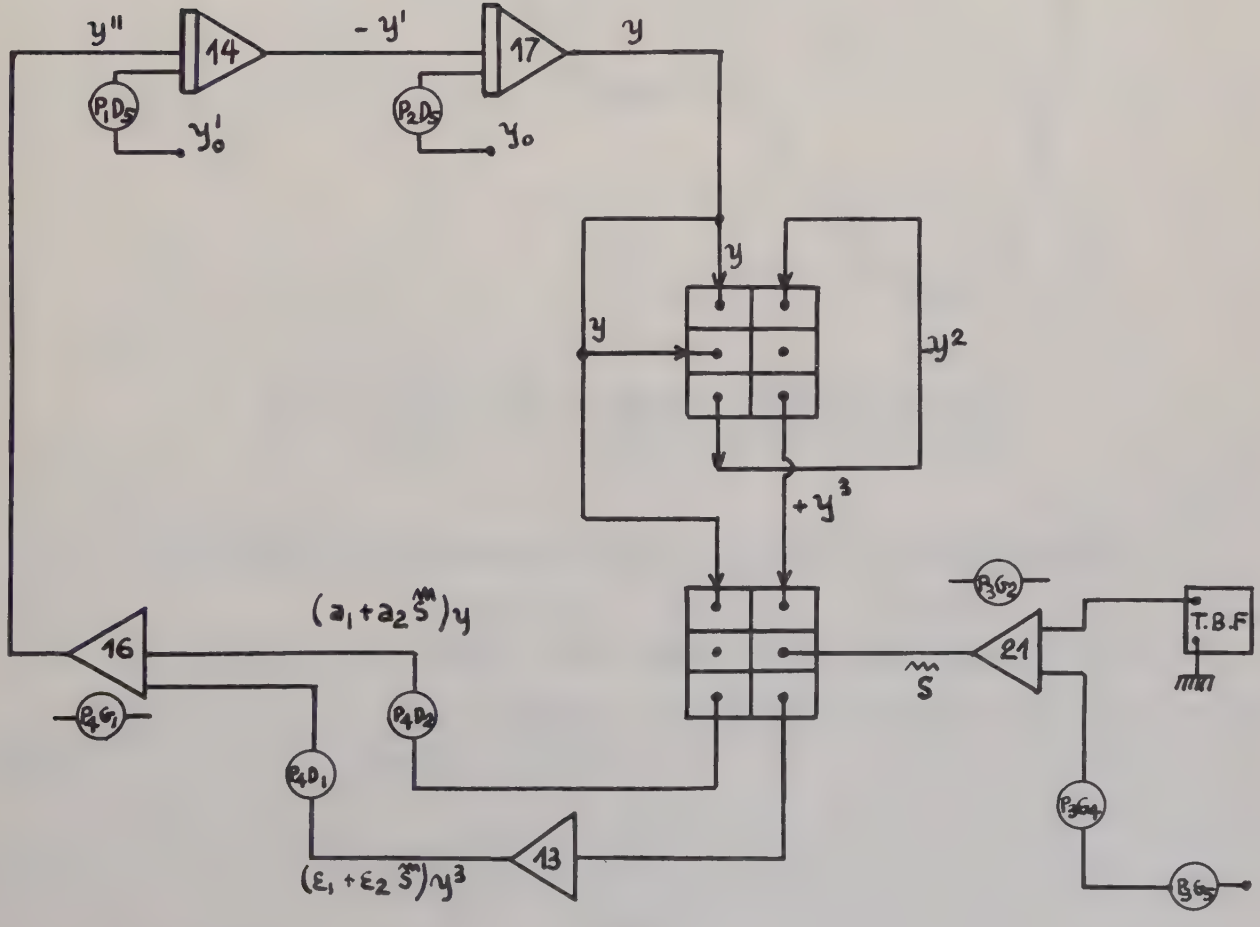
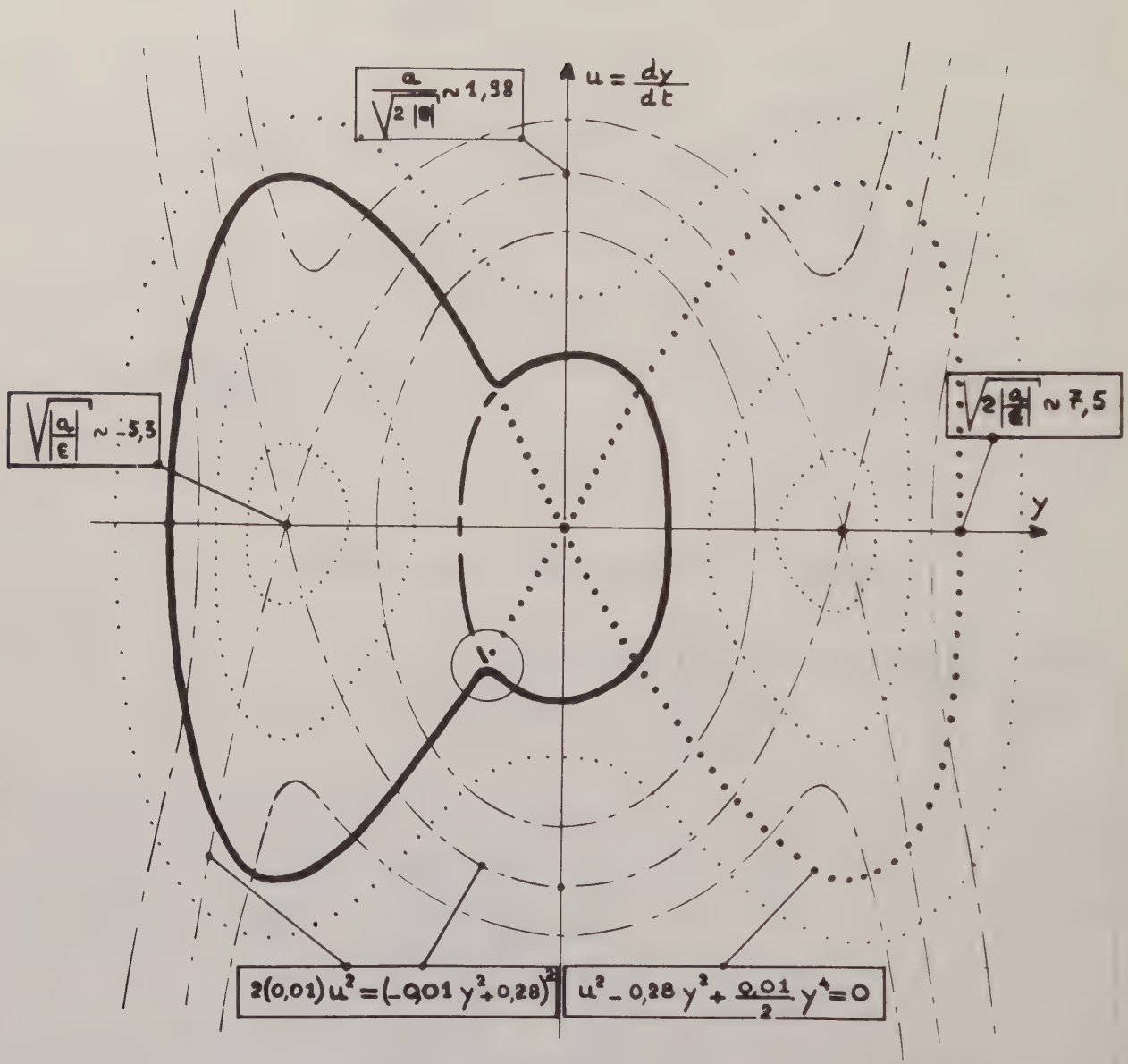


Fig. 79



Solution Périodique Expérimentale ($T \sim 18,18$ sec.)

..... Courbes : $a = -0,28$ $\varepsilon = +0,01$

—— - —— Courbes : $a = +0,28$ $\varepsilon = -0,01$

○ Conditions Initiales : $y(0) = -1,25$; $u(0) = -0,775$

Fig. 80

fisamment lente et d'amplitude aussi grande que possible, en particulier en u, de façon à diminuer au maximum les défauts de l'enregistreur et augmenter la précision.

Pour cela nous avons pris l'équation $y'' + 0,28.\ \hat{\hat{S}}.\ y - 0,01.\ \hat{\hat{S}}y^3 = 0$ et la figure 80 montre la solution périodique expérimentale trouvée (1). L'allure de cette solution correspond bien topologiquement à celle prévue sur la figure 78, comme le prouve sur la figure 80 le tracé en pointillé des différentes courbes de phase de l'équation adjointe.

Le calcul démarre lors d'une commutation du générateur de créneau soit ici pour le passage de la valeur + 1 à la valeur - 1 de la fonction $\hat{S}$ et pour des conditions initiales $y(0) = -1,25$; $u(0) = 0,775$, la période expérimentale étant de T = 18,18 secondes. Pour une certaine zone de conditions initiales pas trop différentes de celles indiquées, nous avons obtenu des solutions physiquement quasi-périodiques (tout au moins dans la limite de durée des expériences). Pour des conditions initiales trop différentes le point de phase correspondant à l'instant de commutation tombe au bout d'un temps assez court sur une branche non fermée et l'amplitude croît très rapidement hors des limites de l'enregistreur.

Le calcul des points théoriques remarquables des courbes de phase de l'équation adjointe nous donne :

$$\begin{cases} y = \sqrt{\left|\frac{a}{\varepsilon}\right|}.\ \sqrt{2} \sim 7,5 \\ u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \sim 5,3 \\ u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ u = \frac{a}{\sqrt{2\,|\varepsilon|}} \sim 1,98 \end{cases}$$

On en conclut que dans le cas de la courbe périodique expérimentale, la moitié du mouvement s'effectue sur l'ovale ayant l'origine pour point double ou sinon à son très proche voisinage. La mesure de l'intersection avec l'axe des y redonne en effet $y \sim 7,5$.

De plus le point initial ($y = -1,25$; $u = -0,775$) étant situé sur deux courbes de phase différentes doit nous redonner les points d'intersection de la solution périodique avec les axes. Leur comparaison avec les valeurs expérimentales donnera une mesure de la cohérence de l'expérience. Nous avons donc :

$$2K_1 = u^2 - 0,28.\ y^2 + \frac{0,01}{2}.\ y^4 = (0,775)^2 - 0,28\ (1,25)^2 + \frac{0,01}{2}(1,25)^4 = +1,0259$$

$$2K_2 = u^2 + 0,28.\ y^2 - \frac{0,01}{2}.\ y^4 = (0,775)^2 + 0,28\ (1,25)^2 - \frac{0,01}{2}\ (1,25)^4 = +0,1753$$

On en déduit les points d'intersection avec les axes :

$$\begin{cases} y \neq 1,985 \\ u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ u \neq 1,013 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \neq -7,52 \\ u = 0 \end{cases}$$

en bon accord avec les points expérimentaux.

Nous allons maintenant passer au calcul théorique de la solution périodique et pour cela expliciter les conditions de périodicité déjà indiquées.

VIII-3-4 - Recherche théorique effective d'une solution périodique de l'équation non linéaire crénelée : $y'' + ay + \hat{\hat{\varepsilon}}.y^3 = 0$.

Nous allons donc écrire d'une manière explicite les conditions de périodicité données par la méthode générale. Pour cela nous considérons les courbes de phase de l'équation adjointe, qui s'écrivent :

$$u^2 + ay^2 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot y^4 = 2K$$

ou

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2K \left\{ 1 - \frac{a}{2K} y^2 - \frac{\varepsilon}{4K} \cdot y^4 \right\}$$

soit :

$$\sqrt{2\,K}.\ t = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{a}{2\,K} \cdot y^2 - \frac{\varepsilon}{4\,K} \cdot y^4}}$$

Pour identifier cette relation avec la fonction elliptique $y = A.\ sn\{u\ ;\ m\}$ nous devons avoir :

$$1 - \frac{a}{2\,K}\ y^2 - \frac{\varepsilon}{4\,K}\ y^4 \equiv (1 - Y^2).\ (1 - m\,Y^2)$$

soit le système

$$\begin{cases} m.\ Y^4 = -\ \dfrac{\varepsilon}{4\,K} \cdot y^4 \\ (1 + m).\ Y^2 = \dfrac{a}{2\,K} \cdot y^2 \end{cases}$$

D'où la relation :

$$m.a^2 + (m + 1)^2.\ \varepsilon\ .\ K = 0$$

En conséquence nous pouvons écrire :

$$\sqrt{1 + m}.\ Y = \pm \sqrt{\frac{a}{2\,K}} \cdot y$$

d'où :

$$\sqrt{2\,K}.\ t = \pm \frac{\sqrt{2\,K}\ .\ \sqrt{1 + m}}{\sqrt{a}} \cdot \int \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)\ (1 - m\,Y^2)}}$$

et :

$$y = \pm\, sn \left\{ \frac{\sqrt{a}\ t}{\sqrt{1 + m}}\ ;\ m \right\}$$

Finalement, nous obtenons les équations paramétriques de la courbe de phase :

$$\begin{cases} y = \pm \sqrt{\dfrac{2\,K}{a}}\ .\ \sqrt{1 + m}\ .\ sn \left\{ \dfrac{\sqrt{a}\ t}{\sqrt{1 + m}}\ ;\ m \right\} \\ u = \pm \sqrt{2\,K}.\ cn\ .\ dn \left\{ \dfrac{\sqrt{a}\ t}{\sqrt{1 + m}}\ \ m \right\} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y\ (0) = 0 \\ u\ (0) = \pm \sqrt{2\,K} \end{cases}$$

Ces équations conviennent si l'on veut prendre l'origine des temps sur l'axe des y. Si l'on veut avoir l'origine des temps sur l'axe des u, cette forme ne convient pas, nous devons prendre (par addition d'un quart de période) :

$$\begin{cases} y = \pm \sqrt{\dfrac{2\,K}{a}}\ .\ \sqrt{1 + m}\ .\ \dfrac{cn}{dn}\ \left\{ \dfrac{\sqrt{a}\ t}{\sqrt{1 + m}}\ ;\ m \right\} \\ u = \pm \sqrt{2\,K}.\ (1 - m).\ \dfrac{sn}{dn^2}\ \left\{ \dfrac{\sqrt{a}\ t}{\sqrt{1 + m}}\ ;\ m \right\} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y\ (0) = \pm \sqrt{\dfrac{2\,K\,(1 + m)}{a}} \\ u\ (0) = 0 \end{cases}$$

Nous sommes ainsi capables d'écrire les conditions de périodicité. Les relations paramétriques indiquées ne sont toutefois valables que pour $a > 0$; $\varepsilon > 0$; $K > 0$ et $0 < m < 1$. Elles prennent des formes différentes suivant les valeurs et signes de a, ε, K, m. Ces formes effectives seront données par des transformations elliptiques classiques. Ces formes pouvant être très nombreuses nous nous contenterons des formes de principe indiquées plus haut et ne donnerons les formes effectives que dans les deux cas expérimentaux qui nous intéressent et qui sont :

$$1/\ \begin{cases} a_1 = -0,28 \\ \varepsilon_1 = +0,01 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad K_1 \# 0,087666 \quad \text{et} \begin{cases} m'_1 \# -1/91,43 \\ m''_1 \# -91,43 \end{cases}$$

$$2/\ \begin{cases} a_2 = +0,28 \\ \varepsilon_2 = -0,01 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad K_2 \# 0,512959 \quad \text{et} \begin{cases} m'_2 \# 1/13,2076 \\ m''_2 \# 13,2076 \end{cases}$$

Le calcul de la condition de périodicité nous amène à prendre le couple ($m''_1 \# -91,43$; $m'_2 \# 1/13,2076$). Dans ces conditions les équations paramétriques prennent la forme :

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2K_1}.\sqrt{\dfrac{-m''_1 - 1}{-a_1}}\ .\ \mathrm{cn}\left\{ \sqrt{\dfrac{(-a_1)(-m''_1+1)}{-m''_1-1}}\ t\ ;\ \dfrac{-m''_1}{-m''_1+1} \right\} \\ u_1 = -\sqrt{2K_1}.\sqrt{-m''_1+1}\ .\ \mathrm{sn}\ .\ \mathrm{dn}\left\{ \sqrt{\dfrac{(-a_1)(-m''_1+1)}{-m''_1-1}}\ t\ ;\ \dfrac{-m''_1}{-m''_1+1} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \sqrt{\dfrac{2K_2}{a_2}}.\sqrt{1+m'_2}\ .\ \dfrac{\mathrm{cn}}{\mathrm{dn}}\left\{ \dfrac{\sqrt{a_2}\ t}{\sqrt{1+m'_2}}\ ;\ m'_2 \right\} \\ u_2 = -\sqrt{2K_2}.\ (1-m'_2).\ \dfrac{\mathrm{sn}}{\mathrm{dn}^2}\left\{ \dfrac{\sqrt{a_2}\ t}{\sqrt{1+m'_2}}\ ;\ m'_2 \right\} \end{cases}$$

Les constantes K_1 et K_2 étant liées par la relation :

$$2K_1 + 2a y^2 = 2K_2 + \varepsilon y^4$$

La condition de périodicité (de période T) est alors donnée par :

$$\begin{cases} y_1\ (+T/4) = y_2\ (-T/4) \\ u_1\ (+T/4) = u_2\ (-T/4) \end{cases}$$

Le plus simple est de diviser membre à membre. Nous obtenons ainsi :

$$\sqrt{\frac{-m''_1-1}{-m''_1+1}}.\ \frac{\mathrm{cn}}{\mathrm{sn}\ \mathrm{dn}}\left\{ \sqrt{\frac{-m''_1+1}{-m''_1-1}}.\ \sqrt{-a_1}.\ T/4\ ;\ \frac{-m''_1}{-m''_1+1} \right\} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+m'_2}}{(1-m'_2)}.\ \frac{\mathrm{cn}\ \mathrm{dn}}{\mathrm{sn}}\left\{ \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{1+m'_2}}.\ T/4\ ;\ m'_2 \right\}$$

En se fixant certains paramètres comme a, ε, T, nous pouvons trouver des couples (m_1, m_2) donc (K_1, K_2), donc des points (y (0) ; u (0)) satisfaisant à la condition de périodicité. Ces courbes sont longues à calculer et ne peuvent être universelles. Nous nous sommes contentés par raison de simplicité – a, ε, y (0) et u (0) étant fixés aux valeurs déjà indiquées – de rechercher la période T par la relation de périodicité.

Nous nous sommes servis des tables de Milne-Thomson. En supposant les valeurs expérimentales rigoureusement exactes et en posant $X = \sqrt{0,28}\ \dfrac{T}{4}$, nous obtenons :

$$(0,98912).\ \frac{\mathrm{cn}}{\mathrm{sn}\ \mathrm{dn}}\{1,01099\ \ X\ ;\ 0,98918\} = -(1,12143).\ \frac{\mathrm{cn}\ \mathrm{dn}}{\mathrm{sn}}\{0,96434\ X\ ;\ 0,07531\}$$

L'argument (0,96434 X) doit être pris supérieur au quart de période, la fonction cn devient alors négative, les autres gardant leurs signes. On trouve que la relation numérique est bien vérifiée pour $X \# 2,375$, ce qui nous donne :

$$T_{th} \# 17'',95$$

L'expérience nous donne $T_{exp} \# 18'',18$ ce qui donne une erreur relative inférieure à 1,5 %. La précision expérimentale ne laissant pas espérer une si bonne concordance, l'accord doit donc être considéré comme bon (1).

VIII-4 - CONCLUSIONS.

Nous pouvons donc considérer cette théorie comme bien vérifiée.

Il reste toutefois à discuter la stabilité orbitale et la stabilité par rapport aux conditions initiales. Il reste surtout à savoir si les conditions de périodicité mènent en général, comme pour le cas linéaire, à la connaissance des frontières séparant les solutions stables des solutions instables. Cette question se complique beaucoup dans le cas non linéaire, car l'obtention d'une solution périodique n'est plus du tout indépendante des conditions initiales. Nous n'étudierons pas ces problèmes, les réservant pour une étude ultérieure.

Par contre, nous allons essayer d'étendre cette méthode aux cas des systèmes d'équations différentielles du deuxième ordre à coefficients crénelés, couplés non linéairement. Cette extension est possible dans la mesure où nous connaissons les solutions des systèmes adjoints à coefficients constants. Nous commençons donc par l'étude de ces systèmes.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VIII

(1) VALAT J. - CRAS 247, 1958, p : 1961-1964.

CHAPITRE IX

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE, COUPLÉES NON LINÉAIREMENT, A COEFFICIENTS CONSTANTS

Pour obtenir quelques renseignements sur les équations différentielles du deuxième ordre à coefficients crénelés, nous avons été amenés à considérer leurs équations adjointes à coefficients constants. De même avant d'essayer d'étudier un système couplé non linéairement et à coefficients périodiques crénelés du genre de celui indiqué dans l'introduction, il semble raisonnable de commencer par l'étude des systèmes adjoints à coefficients constants, pour les motifs indiqués au chapitre précédent.

Pour des raisons de simplicité nous nous limiterons aux systèmes :

$$\begin{cases} x'' = X(x, y) \\ y'' = Y(x, y) \end{cases}$$

où X et Y sont des polynômes en x et y, et pour obtenir des résultats effectifs exploitables ceux-ci seront pris du troisième degré au plus.

Nous commencerons par étudier les cas où le système se ramène à une équation différentielle complexe. Nous tenterons ensuite une résolution par des fonctions elliptiques, résolution possible dans certains cas particuliers seulement. Cette tentative nous amènera à considérer les solutions x (t), y (t) du système, menant à des courbes f (x, y) = 0 algébriques et nous préciserons quelles fonctions uniformisent ces courbes algébriques. Puis nous étudierons le cas du découplage et plus précisément le cas des courbes de Lissajous non-linéaires qui mènent généralement à des courbes f (x, y) = 0 non algébriques. Enfin les recherches précédentes nous suggèreront une méthode pouvant apporter quelques lueurs sur des solutions plus générales, dont nous donnerons un exemple. Pour terminer nous donnerons quelques indications sur les systèmes non linéaires couplés par des polynômes à coefficients périodiques.

IX-1 - RECHERCHE DES MOUVEMENTS ALGEBRIQUES.

IX-1-1 - Systèmes se ramenant à une équation.

Nous commencerons donc par étudier les cas où le système se ramène à une seule équation différentielle complexe et intégrable par des fonctions connues et tabulées, comme les fonctions circulaires et elliptiques. Nous obtiendrons les solutions paramétriques x (t), y (t), en appliquant les formules d'addition de ces fonctions et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires (1). Bien entendu, ces solutions seront des solutions particulières, le nombre de paramètres indépendants n'étant pas suffisant. Nous allons détailler la méthode sur les exemples suivants :

a) L'équation : $\frac{dz}{dt} + z^2 + 1 = 0.$

où z est complexe mène au système :

$$\begin{cases} x'' - 2x = 2x^3 - 6xy^2 \\ y'' - 2y = -2y^3 + 6yx^2 \end{cases}$$

Mais cette équation admet la solution

$$z = x + iy = \cotg \vartheta = \cotg (t - t_o + i\tau)$$

en prenant une constante d'intégration $(-t_o + i\tau)$ complexe. En développant $\cotg\vartheta$ et en identifiant les parties réelles et les parties complexes pures nous obtenons :

$$\begin{cases} x = \dfrac{[1 - th^2\tau].\ [\cotg\ (t - t_o)]}{1 + [th^2\tau].[\cotg^2\ (t - t_o)]} \\ y = \dfrac{[-\ th\ \tau].\ [1 + \cotg^2\ (t - t_o)]}{1 + [th^2\tau].\ [\cotg^2\ (t - t_o)]} \end{cases}$$

qui sont bien solutions du système généré par l'équation du premier ordre.

b) De même l'équation : $\dfrac{dz}{dt} + z^2 - 1 = 0$

qui admet la solution $z = x + iy = th\ (t - t_o + i\tau)$ mène au système :

$$\begin{cases} x'' + 2x = +2x^3 - 6xy^2 \\ y'' + 2y = -2y^3 + 6yx^2 \end{cases}$$

ce qui, en développant th, nous donne les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{[1 + tg^2\tau].\ [th\ (t - t_o)]}{1 + [tg^2\tau].\ [th^2\ (t - t_o)]} \\ y = \dfrac{[tg\ \tau].\ [1 - th^2\ (t - t_o)]}{1 + [tg^2\tau].[th^2\ (t - t_o)]} \end{cases}$$

c) L'équation plus générale : $(z')^2 = (1 - z^2).\ (1 - mz^2)$ qui admet :
$z = x + iy = sn\ (t - t_o + i\tau\ ;\ m)$, nous mène au système :

$$\begin{cases} x'' = -(m + 1)x + 2mx^3 - 6mxy^2 \\ y'' = -(m + 1)y - 2my^3 + 6myx^2 \end{cases}$$

En développant sn, nous obtenons (les fonctions sn u, cn u, dn u étant les fonctions de Jacobi):

$$\begin{cases} x = \dfrac{[sn\ (t - t_o\ ;\ m)].\ [dn\ (\tau\ ;\ 1 - m)]}{[cn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)] + m.\ [sn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [sn^2\ (t - t_o\ ;\ m)]} \\ y = \dfrac{[sn\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [cn\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [cn\ (t - t_o\ ;\ m)].\ [dn\ (t - t_o\ ;\ m)]}{[cn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)] + m.\ [sn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [sn^2\ (t - t_o\ ;\ m)]} \end{cases}$$

d) Si dans le système précédent nous changeons y en $-iy$, x restant invariant, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} x'' = -(m + 1)x + 2mx^3 + 6mxy^2 \\ y'' = -(m + 1)y + 2my^3 + 6myx^2 \end{cases}$$

qui dérive d'ailleurs du potentiel

$$V = \frac{1}{2}.\ (m + 1).\ (x^2 + y^2) - \frac{1}{2}.\ m.\ (x^4 + 6x^2y^2 + y^4) + K$$

En développant $z = x + y = sn\ (u + v)$ au lieu de $z = x + iy = sn\ (u + iv)$, nous obtenons les solutions paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{[cn\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [dn\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [sn\ (t - t_o\ ;\ m)]}{1 - m.\ [sn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [sn^2\ (t - t_o\ ;\ m)]} \\ y = \dfrac{[sn\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [cn\ (t - t_o\ ;\ m)].\ [dn\ (t - t_o\ ;\ m)]}{1 - m.\ [sn^2\ (\tau\ ;\ 1 - m)].\ [sn^2\ (t - t_o\ ;\ m)]} \end{cases}$$

e) L'équation $(z')^2 = 4.\ z^3 - g_2.\ z - g_3$ de la fonction $z = x + iy = p\ (t - t_o + i\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)$ mène au système :

$$\begin{cases} x'' = 6x^2 - 6y^2 - g_2/2 \\ y'' = 12xy \end{cases}$$

qui admet ainsi les solutions paramétriques (pu et p'u étant la fonction de Weierstrass et sa dérivée) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\{4\,[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\cdot[p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)] + g_2\}\cdot\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] - [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)]\} - 2g_3}{4\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] + [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)]\}^2} \\ y = \dfrac{-2.\,[p'\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\cdot[p'\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)]}{4\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] + [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)]\}^2} \end{cases}$$

f) Si dans le système précédent nous changeons y en - iy, x restant invariant, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} x'' = 6x^2 + 6y^2 - g_2/2 \\ y'' = 12xy \end{cases}$$

qui dérive du potentiel :

$$V = 2x^3 + 6y^2x - (g_2/2)\cdot x + K$$

En développant $z = x + y = p\ (u + v)$ au lieu de $z = x + iy = p\ (u + iv)$ nous obtenons les solutions paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\{4\,[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\,[p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] - g_2\}\cdot\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] + [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\} - 2g_3}{4\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] - [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\}^2} \\ y = \dfrac{-2\,[p'\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)].\,[p'\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]}{4\{[p\ (t - t_o\ ;\ g_2\ ;\ g_3)] - [p\ (\tau\ ;\ g_2\ ;\ g_3)]\}^2} \end{cases}$$

Cette méthode permet ainsi de trouver quelques solutions, il est vrai, très particulières puisqu'elles dépendent de deux paramètres au lieu de quatre. Mais si la portée de cette méthode semble par nature assez restreinte, elle suggère cependant un certain nombre d'idées comme nous allons le voir.

IX-1-2 - Intégration par des fonctions elliptiques.

Nous avons pu dans le paragraphe précédent trouver quelques solutions particulières pour certains systèmes particuliers et nous avons vu que les plus générales de ces solutions s'exprimaient au moyen des fonctions elliptiques $sn^2(u)$ ou $p\ (u)$, ces deux fonctions se ramenant d'ailleurs l'une à l'autre puisque :

$$p\ (u) = \frac{1}{sn^2\ (u)} - \frac{1}{3}\,(m + 1)$$

Ce résultat ne doit pas étonner, les fonctions elliptiques de mêmes périodes et leurs dérivés étant liées par une relation algébrique. Il semble donc raisonnable de chercher à étendre les résultats précédents en essayant de trouver les fonctions elliptiques les plus générales qui puissent répondre à un système du genre $x'' = X\ ;\ y'' = Y$ défini plus haut (cette tentative appelle toutefois des réserves que nous préciserons plus tard). Or nous savons que ces fonctions elliptiques $x_1 = x\ ;\ x_2 = y$ les plus générales doivent être de la forme :

$$x_i = \frac{N_i\ (p)}{P_i\ (p)} + \frac{Q_i\ (p)}{R_i\ (p)}\cdot\ p'$$

où p et p' sont la fonction de Weierstrass et sa dérivée et N_i, P_i, Q_i, R_i des polynômes entiers en p (u). Mais cette recherche nécessite une véritable analyse dimensionnelle, les puissances les plus élevées et les plus basses des N_i, P_i, Q_i, R_i ne pouvant être quelconques pour répondre au

système $x'' = X$, $y'' = Y$. Une telle méthode conduit à une véritable algébrisation du système différentiel, celui-ci se transformant en un système d'équations algébriques non linéaires ayant pour inconnues les coefficients des huit polynômes N_i, P_i, Q_i, R_i, (1). C'est ce que nous allons voir sur l'exemple du système suivant :

$$\begin{cases} x'' + a.x = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2 \\ y'' + b.y = \delta . x.y \end{cases}$$

Nous commençons par effectuer l'analyse dimensionnelle de ce système en posant symboliquement avec $(p')^2 = (3)$.

$$\begin{cases} x = (e) + (f).\ p' \\ y = (g) + (h).\ p' \end{cases}$$

où e, f, g, h représentent la différence des degrés les plus élevés des polynômes en p des numérateurs et des dénominateurs. La forme du système choisi impose certaines relations entre ces quantités. Il suffit pour les trouver d'effectuer les dérivations et les produits et d'identifier. Cette analyse, simple en principe, est en réalité fort longue car les combinaisons possibles sont nombreuses ; elle mène finalement aux valeurs suivantes :

$$e = g = (1) \quad f \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right) \quad h \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right)$$

De même l'analyse des puissances les plus basses mène aux valeurs suivantes :

$$e = f = g = h = (-2)$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple : nous prendrons comme fractions rationnelles, des séries de Laurent de pôles nuls, c'est-à-dire que nous rechercherons des solutions x et y, telles que :

$$\begin{cases} x = \left\{Ap + C + \frac{E}{p} + \frac{G}{p^2}\right\} + p'.\left\{\frac{I}{p} + \frac{K}{p^2}\right\} \\ y = \left\{Lp + N + \frac{Q}{p} + \frac{S}{p^2}\right\} + p'.\left\{\frac{U}{p} + \frac{W}{p^2}\right\} \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans le système couplé et en identifiant, nous obtenons le système suivant de 24 équations algébriques non linéaires à 12 inconnues :

(1) $$6A = \varepsilon_1 (A^2) + \varepsilon_2 (L^2)$$

(2) $$aA = \varepsilon_1 (4I^2 + 2AC) + \varepsilon_2 (4U^2 + 2LN)$$

(3) $$2E - \frac{g_2}{2} A + aC = \varepsilon_1 (C^2 + 2AE + 8IK) + \varepsilon_2 (N^2 + 2LQ + 8UW)$$

(4) $$12G + aE = \varepsilon_1 (4K^2 + 2AG + 2CE - g_2 I^2) + \varepsilon_2 (4W^2 + 2LS + 2NQ - g_2 U^2)$$

(5) $$-\frac{3}{2} g_2 E + aG = \varepsilon_1 (E^2 + 2CG - g_3 I^2 - 2g_2 IK) + \varepsilon_2 (Q^2 + 2NS - g_3 U^2 - 2g_2 UW)$$

(6) $$-5g_2 G - 2g_3 E = \varepsilon_1 (-g_2 K^2 + 2EG - 2g_3 IK) + \varepsilon_2 (-g_2 W^2 + 2QS - 2g_3 UW)$$

(7) $$-6g_3 G = \varepsilon_1 (G^2 - g_3 K^2) + \varepsilon_2 (S^2 - g_3 W^2)$$

(8) $$2I = \varepsilon_1 (AI) + \varepsilon_2 (2LU)$$

(9) $$aI = \varepsilon_1 (2AK + 2CI) + \varepsilon_2 (2LW + 2NU)$$

(10) $$-\frac{g_2}{2} I + aK = \varepsilon_1 (2CK + 2EI) + \varepsilon_2 (2NW + 2QU)$$

$$(11) \quad -3g_2K - 2g_3I = \varepsilon_1 (2EK + 2GI) + \varepsilon_2 (2QW + 2SU)$$

$$(12) \quad -6g_3K = \varepsilon_1 (2GK) + \varepsilon_2 (2SW)$$

$$(13) \quad 6L = \delta (AL)$$

$$(14) \quad bL = \delta (AN + CL + 4IU)$$

$$(15) \quad 2Q - \frac{g_2}{2} L + bN = \delta (AQ + CN + EL + 4IW + 4KU)$$

$$(16) \quad 12S + bQ = \delta (AS + CQ + EN + GL - g_2IU + 4KW)$$

$$(17) \quad -\frac{3}{2} g_2 Q + bS = \delta (CS + EQ + GN - g_2IW - g_3IU - g_2KU)$$

$$(18) \quad -5g_2S - 2g_3Q = \delta (ES + GQ - g_3IW - g_3KU - g_2KW)$$

$$(19) \quad -6g_3S = \delta (GS - g_3KW)$$

$$(20) \quad 2U = \delta (AU + IL)$$

$$(21) \quad bU = \delta (AW + CU + IN + KL)$$

$$(22) \quad -\frac{g_2}{2} U + bW = \delta (CW + EU + IQ + KN)$$

$$(23) \quad -3g_2W - 2g_3U = \delta (EW + GU + IS + KQ)$$

$$(24) \quad -6g_3W = \delta (GW + KS)$$

L'étude des solutions possibles d'un tel système n'est pas très commode car les combinaisons qui apparaissent au cours de la discussion sont nombreuses. Nous devons nous attendre à priori à l'impossibilité d'une solution générale puisque pour 12 coefficients inconnus, plus deux quantités g_2 et g_3, nous avons 24 relations. Toutefois des solutions sont peut être possibles pour certaines valeurs particulières des coefficients inconnus et des coefficients a, b, ε_1 , ε_2 , δ . Pour être intéressantes ces solutions ne devront pas supprimer le couplage, le cas $\delta = 0$ pouvant être à la rigueur admis (le cas $\varepsilon_2 = 0$ est déjà connu). La discussion confirme ces prévisions. Nous nous contenterons de donner la solution suivante : (A = I = K = L = S = U = 0) :

$$x = \left(\frac{b}{\delta}\right) + \left(\frac{-3g_2}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{p} + \left(\frac{-6g_3}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$y = \pm \left\{ \frac{6}{\delta} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \delta}{\varepsilon_2}\right) \cdot g_3} \right\} \cdot \frac{p'}{p^2}$$

cette solution n'étant valable que pour des coefficients a, b, ε_1 , ε_2 , δ liés par la relation (le cas a = b ; $\delta = 2\varepsilon_1$ mis à part) :

$$3.b.(b.\varepsilon_1 - a.\delta).(2\varepsilon_1 - \delta)^2 + \delta . (a.\delta - 2.b.\varepsilon_1)^2 = 0$$

p et p' étant la fonction de Weierstrass et sa dérivée, liées comme on le sait par la relation :

$$p'^2 = 4p^3 - g_2p - g_3$$

g_2 et g_3 étant donnés par les relations :

$$\begin{cases} 18\, g_2 = \left\{ \dfrac{a.\delta - 2.b.\varepsilon_1}{2.\varepsilon_1 - \delta} \right\}^2 \\ 24\, g_3 = -\left\{ \dfrac{+a.\delta - 2.b.\varepsilon_1}{2.\varepsilon_1 - \delta} \right\} \end{cases}$$

Ces résultats et ceux du paragraphe précédent nous amènent à la constatation suivante : la résolution d'un système par des fonctions elliptiques ne semble possible que si nous imposons certaines valeurs particulières ou au mieux une certaine relation particulière aux coefficients a, b, ε_1, ε_2, δ. Ce fait semble général. Nous pouvons nous en rendre compte en essayant des développements en série de Laurent de la variable ou bien d'une fonction f du genre $f'^2 = \Sigma p^n$ plus compliquée que p (u) ou sn (u). La conclusion en est simple : le développement devant être limité sous peine de rendre le calcul effectif impraticable, les coefficients ne peuvent être quelconques.

Pour s'en convaincre plus rapidement et plus simplement que par des tentatives de ce genre, nous devons remarquer que cette recherche de fonctions elliptiques comme solutions x, y, nous amène nécessairement à des courbes f (x, y) = 0 algébriques. C'est ainsi que les solutions paramétriques du paragraphe précédent correspondent à deux coniques, deux quartiques, deux cubiques. Or il suffit de considérer le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta = 0$ du système $\begin{cases} x'' + ax = 0 \\ y'' + by = 0 \end{cases}$ des courbes de Lissajous pour nous rendre compte que cette recherche d'intégration par des fonctions elliptiques ne peut nous fournir des solutions générales. Comme il est bien connu, les courbes de Lissajous ne sont fermées (et algébriques) que pour une relation bien particulière entre a et b. Nous reviendrons plus loin sur ces courbes (IX-2-1).

IX-1-3 - Recherche des courbes algébriques du système par la connaissance d'une intégrale première.

Les fonctions elliptiques ne sont pas les fonctions uniformes les plus générales permettant de paramétrer, d'uniformiser une courbe algébrique f (x, y) = 0 donnée. Or ces fonctions plus générales ne se rencontrent guère dans l'arsenal du praticien et de plus les fonctions elliptiques sont à peu près les seules à être tabulées. C'est pourquoi, dans l'étude des systèmes couplés non linéairement, il serait peut-être agréable de pouvoir s'imposer et rechercher à priori, une courbe f (x, y) = 0 algébrique, sinon parcourue périodiquement dans le temps, du moins fermée en x, y, évitant certaines régions ou permettant dans une certaine mesure certaines conditions initiales, etc . sans chercher à la paramétrer. Dans le cas où il est possible de trouver une intégrale première du mouvement, nous allons montrer que cette recherche à priori est possible.

IX-1-3-1 - Recherche d'intégrales premières.

Nous allons donc rechercher des intégrales premières du mouvement pour un système du genre considéré. Il nous faut tout de suite remarquer que les coefficients des polynômes X et Y ayant été supposés quelconques, les équations canoniques fondamentales de la dynamique analytique ordinaire ne sont plus valables. Le système pourra toutefois s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \varpi_i \qquad (\varpi_i \neq 0)$$

soit :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \varpi_i$$

Le mouvement d'un tel système s'apparente donc aux mouvements avec conditions supplémentaires imposées. Bien entendu, H sera choisi pour obtenir les ϖ_i les plus simples possibles (nuls éventuellement) et les équations canoniques fondamentales s'écriront (1) :

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + \varpi_i \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} + \Sigma_i\, \varpi_i \cdot \dfrac{dq_i}{dt} \end{cases}$$

Dans notre cas $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. S'il est possible d'intégrer les $\varpi_i \cdot dq_i$, nous obtiendrons une intégrale première. Donnons en des exemples :

a) Le système

$$\begin{cases} x'' + ax = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2 \\ y'' + by = \delta . xy \end{cases}$$

admet les H, ϖ_i suivants :

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} \cdot (x'^2 + y'^2) + \frac{a}{2} \cdot x^2 + \frac{b}{2} \cdot y^2 - \frac{\delta}{2} \cdot xy^2 - \frac{\varepsilon_1}{3} \cdot x^3 + \text{cste} \\ \varpi_x = \left(\varepsilon_2 - \frac{\delta}{2}\right) y^2 \\ \varpi_y = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$H - \Sigma_i \int \varpi_i \, . \, dq_i = \text{cste} = H - \left(\frac{\varepsilon_2 - (\delta/2)}{\varepsilon_2}\right) . \int (x'' + ax - \varepsilon_1 . x^2) \, dx$$

$$= H - \left(\frac{\varepsilon_2 - (\delta/2)}{\varepsilon_2}\right) . \left(\frac{x'^2}{2} + \frac{a}{2} \cdot x^2 - \frac{\varepsilon_1}{3} . x^3 + \text{cste}\right)$$

soit finalement en posant u = dx/dt et v = dy/dt :

$$3.\delta.u^2 + 6.\varepsilon_2.v^2 + 3.a.\delta.x^2 + 6.b.\varepsilon_2.y^2 - 2.\delta.\varepsilon_1.x^3 - 6.\delta.\varepsilon_2.xy^2 = \text{cste}$$

b) De même le système

$$\begin{cases} x'' + \alpha x = \gamma x^3 + \mu xy^2 \\ y'' + \beta y = \delta y^3 + \nu yx^2 \end{cases}$$

admet les H, ϖ_i suivants :

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) + \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} y^2 - \frac{\gamma}{4} x^4 - \frac{\nu}{2} x^2 y^2 - \frac{\delta}{4} y^4 + \text{cste} \\ \varpi_x = (\mu - \nu) . x . y^2 \\ \varpi_y = 0 \end{cases}$$

ce qui nous mène à l'intégrale première :

$$2(\nu u^2 + \mu v^2) + 2(\alpha\nu x^2 + \beta\mu y^2) - (\nu\gamma x^4 + 2\mu\nu x^2 y^2 + \mu\delta y^4) = \text{cste}$$

Il nous faut aborder maintenant la question des conditions d'intégration des $\varpi_i \, dq_i$. Remarquons que dans les deux exemples considérés les termes de couplage interviennent, aux coefficients près, comme parties complémentaires d'une différentielle totale d'une fonction algébrique des deux fonctions x et y. Nous allons généraliser ce fait. Pour cela considérons le système général :

$$\begin{cases} x'' = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} \\ y'' = b_{03}y^3 + b_{12}xy^2 + b_{21}x^2y + b_{30}x^3 + b_{02}y^2 + b_{11}xy + b_{20}x^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00} \end{cases}$$

Posons u = x' ; v = y'. Le système peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} udu - (a_{30}x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}) \, dx = (a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{01}y) \, dx \\ vdv - (b_{03}y^3 + b_{02}y^2 + b_{01}y + b_{00}) \, dy = (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{10}x) \, dy \end{cases}$$

Les membres du système situés à gauche sont des différentielles totales, que nous appellerons dU et dV. Quant aux membres de droite, remarquons qu'ils interviennent, aux coefficients près, com-

me parties complémentaires d'une différentielle totale, à condition de les prendre dans l'ordre que nous indiquons.

Nous avons donc le système suivant de 8 équations à 12 inconnues dX_i, dY_j :

$$\begin{cases} dU = a_{21}\,dX_2 + a_{12}\,dX_2 + a_{03}\,dX_3 + a_{11}\,dX_4 + a_{02}\,dX_5 + a_{01}\,dX_6 \\ dV = b_{30}\,dY_1 + b_{21}\,dY_2 + b_{12}\,dY_3 + b_{20}\,dY_4 + b_{11}\,dY_5 + b_{10}\,dY_6 \\ d(x^3 y) = 3\,d\,X_1 + dY_1 \\ d(x^2 y^2) = 2\,dX_2 + 2\,dY_2 \\ d(xy^3) = d\,X_3 + 3\,d\,Y_3 \\ d(x^2 y) = 2\,d\,X_4 + d\,Y_4 \\ d(x\,y^2) = d\,X_5 + 2\,d\,Y_5 \\ d(x\,y) = d\,X_6 + d\,Y_6 \end{cases}$$

permettant en principe de déterminer les $d\,X_i$, $d\,Y_j$, en fonction des quantités de gauche, qui sont toutes des différentielles totales exactes. La discussion d'un tel système étant longue à priori malgré le grand nombre de termes nuls, nous nous contenterons de ces indications générales en faisant toutefois remarquer que pour des systèmes un peu compliqués les coefficients a_{ij}, b_{kl} ne peuvent en général être absolument quelconques.

IX-1-3-2 - Recherche à priori d'une courbe algébrique.

Nous allons rechercher dans quel cas la courbe $f(x, y) = 0$ du mouvement est une courbe algébrique de degré n, en supposant toutefois que nous connaissions une intégrale première du mouvement que nous écrivons :

$$\alpha u^2 + \beta v^2 = F(x, y)$$

où $F(x, y)$ est un polynôme en x et y de degré $(p + 1)$, p étant le degré le plus élevé des polynômes $X(x, y)$, $Y(x, y)$ du système $x'' = X$; $y'' = Y$. Nous aurons donc en dérivant une fois $f(x, y) = 0$;

$$\begin{cases} f'_x \cdot u + f'_y \cdot v = 0 \\ \alpha u^2 + \beta v^2 = F \end{cases}$$

d'où nous tirons les valeurs de u^2, uv et v^2, soient :

$$u^2 = \frac{(f'_y)^2 \cdot F}{\alpha (f'_y)^2 + \beta (f'_x)^2} \qquad uv = \frac{-(f'_x)\cdot(f'_y)\cdot F}{\alpha (f'_y)^2 + \beta (f'_x)^2} \qquad v^2 = \frac{(f'_x)^2 \cdot F}{\alpha (f'_y)^2 + \beta (f'_x)^2}$$

Par conséquent en dérivant une deuxième fois $f(x, y) = 0$ nous obtenons :

$$(f''_{x^2}) \cdot u^2 + 2\,(f''_{xy}) \cdot uv + (f''_{y^2}) \cdot v^2 + (f'_x)\,x'' + (f'_y)\,y'' = 0$$

D'où en portant les valeurs de u^2, uv, v^2 déjà trouvées, l'identité :

$$0 \equiv (f''_{x^2}) \cdot (f'_y)^2 \cdot F - 2\,(f''_{xy}) \cdot (f'_x) \cdot (f'_y) \cdot F + (f''_{y^2}) \cdot (f'_x)^2 \cdot F + \left\{\alpha (f'_y)^2 + \beta (f'_x)^2\right\} \cdot \left\{(f'_x) \cdot X + (f'_y) \cdot Y\right\}$$

Cette relation sera donc de degré :

$$(n - 2) + 2\,(n - 1) + (p + 1) = 3\,n - 3 + p = 2\,(n - 1) + (n - 1) + (p)$$

La courbe algébrique ayant été choisie de degré n, possède donc au maximum :

$$1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{1}{2} \cdot \{1 + (n + 1)\} \cdot \{(n + 1)\} = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$$

coefficients, soit par conséquent :

$$\frac{1}{2}.\ (n+1).\ (n+2) - 1 = \frac{1}{2}.\ n.\ (n+3)$$

coefficients indépendants inconnus, à déterminer par un système de :

$$\frac{1}{2}.\ ((3n+p-3)+1).\ ((3n+p-3)+2) = \frac{1}{2}.\ (3n+p-1).\ (3n-p-2)$$

relations algébriques non linéaires. Il est facile de voir que pour $0 < P \leqslant 3$ (et même pour une gamme plus étendue dans les deux sens) nous avons toujours :

$$(3n+p-1).\ (3n+p-2).\ >\ n.\ (n+3)$$

Nous aurons donc (beaucoup) moins d'inconnues que de relations et les coefficients du système et la constante de l'intégrale première ne pourront être quelconques (1).

Nous avons recherché des courbes algébriques fermées pour des systèmes analogues à ceux déjà étudiés. Toutefois la discussion des systèmes obtenus se révèle longue, même pour de simples coniques.

En résumé ces résultats confirment ceux que nous avions déjà trouvés pour les fonctions elliptiques. Dans la mesure où l'on connaît une intégrale première, ils les généralisent même puisqu'ils s'appliquent à une courbe algébrique à priori quelconque, donc à des fonctions encore plus générales que les fonctions elliptiques. Une étude plus approfondie va nous montrer quelles sont ces fonctions.

IX-1-4 - Recherche des fonctions fuchsiennes uniformisant les courbes $f(x, y) = 0$ algébriques du système.

Nous avons déjà dit au paragraphe IX-1-3 que les fonctions elliptiques n'étaient pas les fonctions uniformes les plus générales permettant de paramétrer une courbe algébrique donnée.

Poincaré (2) a montré que ce problème de l'uniformisation d'une courbe algébrique quelconque était résolu par les fonctions fuchsiennes-kleinéennes créées par lui-même pour la recherche des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Pour résumer les travaux de Jacobi, Bertini, Picard et Poincaré sur l'uniformisation, nous énoncerons le résultat suivant (3) :

Si la courbe est du genre 0, elle est unicursale et ses coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles d'un paramètre.

Si la courbe est du genre 1, ses coordonnées s'expriment en fonctions rationnelles de $p(u)$ et $p'(u)$, fonctions (uniformes) de Weierstrass et sa dérivée.

Si la courbe est du genre supérieur à l'unité, ses coordonnées s'expriment par des fonctions fuchsiennes.

Rappelons que le genre d'une courbe algébrique de degré n est donné par la relation :

$$g = \frac{1}{2}.\ (n-1).\ (n-2) - (d+r)$$

d et r étant le nombre effectif de points doubles et de rebroussements de la courbe.

Nous allons maintenant essayer de préciser quelles fonctions fuchsiennes uniformisent les courbes $f(x, y) = 0$ algébriques du système. Pour cela nous allons rappeler brièvement, sans aucune prétention à la rigueur, quelques définitions possibles et quelques propriétés de ces fonctions qui nous semblent utiles pour la suite de notre exposé (2).

Nous introduirons les fonctions thêtafuchsiennes par l'équation de définition suivante (z est la variable complexe) :

$$\vartheta(zK) = \vartheta(z).\left\{\frac{d(zK)}{dz}\right\}^{-m}$$

où la notation zK signifie que l'on effectue sur z l'opération

$$zK = \frac{az + b}{cz + d}$$

c'est-à-dire que l'on substitue (zK) à z. Nous prendrons a, b, c, d liés par la relation : ad - bc = + 1. En ce cas la substitution (z ; zK) forme un groupe au sens de la théorie des groupes et la relation fondamentale devient :

$$\vartheta\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \vartheta(z) \times (cz + d)^{2m}$$

Par contre, nous appellerons fuchsienne une fonction restant invariante pour un groupe de substitution $\frac{az + b}{cz + d}$ donné. Une fonction fuchsienne peut donc être considérée comme quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes de même groupe et de même exposant et nous avons :

$$F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = F(z)$$

Plus précisément, si a, b, c, d sont entiers, la fonction est dite modulaire ; si a, b, c, d sont réels, la fonction est dite fuchsienne et si a, b, c, d sont complexes, la fonction est dite kleinéenne. Dans toute la suite nous ne ferons pas de distinctions entre ces fonctions et nous les engloberons sous le nom général de fuchsiennes.

Cela étant, nous allons voir comment se transforment les dérivées premières et secondes d'une fonction thêtafuchsienne lorsque l'on effectue sur elle une substitution $\left(z\ ;\ zK = \frac{az + b}{cz + d}\right)$ d'un groupe fuchsien. Le cas des fonctions fuchsiennes s'en déduira immédiatement en faisant m = 0 dans les formules obtenues. Nous avons :

$$\frac{d(zK)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

Par suite la nouvelle dérivée devient en fonction des anciennes quantités :

$$\frac{d}{d(zK)}\{\vartheta(zK)\} = \frac{dz}{d(zK)} \times \frac{d}{dz}\{(cz + d)^{2m}.\ \vartheta(z)\} = (cz + d)^{2m+1}.\left\{(cz + d).\ \frac{d\vartheta(z)}{dz} + 2\,mc.\,\vartheta(z)\right\}$$

En répétant une nouvelle fois l'opération nous obtenons la dérivée seconde :

$$\frac{d^2}{d(zK)^2}.\{\vartheta(zK)\} = (cz + d)^{2m+2} \times \left\{(cz + d)^2.\ \frac{d^2\vartheta(z)}{dz^2} + 2c.\ (2m + 1).\ (cz + d).\ \frac{d\vartheta(z)}{dz} + 2.m.c^2(2m+1).\ \vartheta(z)\right\}$$

et les dérivées premières et secondes d'une fonction fuchsienne deviennent :

$$\frac{d}{d(zK)}\{F(zK)\} = (cz + d)^2.\ \frac{dF(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2}{d(zK)^2}\{F(zK)\} = (cz + d)^4.\ \frac{d^2F(z)}{dz^2} + 2.c.\ (cz + d)^3.\ \frac{dF(z)}{dz}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir des renseignements sur les fonctions fuchsiennes et les courbes f(x, y) = 0 algébriques les plus générales d'un système couplé non linéairement (même si sa forme est plus compliquée que celle à laquelle nous nous sommes en principe limités). En effet d'une part x et y vérifient le système non linéaire, mais d'autre part restent invariantes dans une substitution (z ; zK) d'un groupe fuchsien en tant que fonctions fuchsiennes coordonnées paramétriques d'une courbe algébrique. Que devient le système dans cette transformation ? Nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dz^2}\{x(z)\} = X[x(z),\ y(z)] = x'' \\ \dfrac{d^2}{dz^2}\{y(z)\} = Y[x(z),\ y(z)] = y'' \end{cases}$$

Pour une substitution (z ; zK) du groupe, il devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{d(zK)^2}\{x(zK)\} = X[x(zK), y(zK)] = X[x(z), y(z)] = (cz+d)^4.x'' + 2c(cz+d)^3.x' \\ \dfrac{d^2}{d(zK)^2}\{y(zK)\} = Y[x(zK), y(zK)] = Y[x(z), y(z)] = (cz+d)^4.y'' + 2c(cz+d)^3.y' \end{cases}$$

En remplaçant x'' et y'' par leurs valeurs tirées du système primitif nous obtenons :

$$\begin{cases} 2.c.(cz+d)^3.x' = \{1-(cz+d)^4\}.X \\ 2.c.(cz+d)^3.y' = \{1-(cz+d)^4\}.Y \end{cases}.$$

Il nous faut alors considérer deux cas principaux :

Dans le cas : $c = 0$, $d^4 = 1$ nous retombons sur le cas déjà longuement étudié des fonctions elliptiques. Nous renvoyons donc aux paragraphes précédents.

Dans le cas général nous remarquons immédiatement que : x, y, x', y' restent liées par la relation, intégrale première :

$$x'.Y(x, y) = y'.X(x, y)$$

En particulier les conditions initiales ne peuvent être absolument quelconques : $x'_o.Y_o = y'_o.X_o$. Supposons maintenant x et y liées par une relation algébrique de degré n :

$$f(x, y ; n) = 0$$

Par dérivation nous obtenons :

$$f'_x.x' + f'_y.y' = 0 = \{f'_x.X + f'_y.Y\}.\left\{\frac{1-(cz+d)^4}{2c(cz+d)^3}\right\}$$

Par suite nous obtenons la relation :

$$f'_x.X + f'_y.Y = 0$$

qui est une relation algébrique de degré $(n + p - 1)$. Comme x et y ne peuvent vérifier simultanément ces deux relations, il en résulte que la dernière relation algébrique est une identité.

Les $\frac{1}{2}.n.(n+3)$ coefficients indépendants inconnus de la courbe algébrique $f(x, y ; n) = 0$ de degré n, devront dont être déterminés par un système de :

$$\frac{1}{2}.(n+p-1+1).(n+p-1+2) = \frac{1}{2}.(n+p).(n+p+1)$$

relations. Ce nombre de relations est supérieur au nombre de coefficients inconnus à déterminer, si nous avons :

$$(n+p).(n+p+1) > n(n+3)$$

soit :

$$n.(2p-2) + p.(p+1) > 0$$

ce qui est bien vérifié dans notre cas. Il en résulte que les coefficients des polynômes X et Y ne peuvent être quelconques, constatation à rapprocher de certains phénomènes physiques.

Ces résultats généralisent donc ceux déjà trouvés dans les derniers paragraphes : Ni les coefficients des polynômes X et Y, ni les conditions initiales ne peuvent être quelconques (1).

Nous limiterons là notre étude des fonctions fuchsiennes, car nous allons maintenant essayer d'aborder l'étude des mouvements $f(x, y) = 0$ non algébriques.

D'après ce que nous venons de voir pour les mouvements algébriques, il semble donc que nous ne puissions plus rien espérer des fonctions elliptiques car celles-ci, liées par une relation algébrique, ne peuvent nous mener qu'à ce genre de mouvements. Pourtant il n'en est rien. Et cela provient du fait que nous n'avons considéré jusqu'ici que des fonctions de mêmes périodes. Il suffit pour nous en rendre compte de nous reporter, au cas très particulier du découplage total entre les deux dimensions c'est-à-dire au cas des mouvements de Lissajous (éventuellement non linéaires) dans le plan.

En l'absence d'une théorie sur la forme des solutions générales des systèmes couplés non linéairement, nous étudierons les cas les plus simples. Nous commencerons par les cas du découplage, qui nous mènera à ce que nous pouvons appeler des courbes de Lissajous généralisées. Puis nous rappelerons le cas d'un couplage orienté, c'est-à-dire d'une action d'une dimension sur l'autre, cette dernière ne pouvant toutefois réagir sur la première.

Puis dans un autre paragraphe nous nous inspirerons de notre étude des mouvements algébriques par les fonctions fuchsiennes pour esquisser une méthode pouvant nous apporter quelques lueurs sur la forme des solutions générales d'un système couplé non linéairement. Nous montrerons les difficultés d'interprétation auxquelles nous mène cette méthode. Nous lèverons ces difficultés et donnerons dans certains cas particuliers la solution générale du mouvement couplé.

IX-2 - RECHERCHE DE MOUVEMENTS f (x, y) = 0 NON ALGEBRIQUES.

IX-2-1 - Mouvements de Lissajous non linéaires.

Nous allons rappeler les propriétés bien connues des courbes de Lissajous, dont les coordonnées paramétriques s'écrivent :

$$x = A \cos \omega t \qquad y = B \cos (\omega' t - \vartheta)$$

La trajectoire de ce mouvement est évidemment inscrite dans un rectangle de côtés (A), (B), les points de contacts successifs avec ses côtés étant donnés par $\omega t = k\pi$ et $\omega' t - \vartheta = k'\pi$. Nous savons de plus que cette trajectoire n'est fermée et périodique que dans le cas où le rapport $\rho = \omega'/\omega$ est commensurable. Du fait des propriétés des fonctions trigonométriques, la courbe est aussi algébrique, puisque les arguments de ces fonctions sont multiples d'un argument commun. Mais si le rapport ρ est incommensurable, le mouvement n'est ni périodique ni fermé. On peut démontrer que le point M (x, y) passe une infinité de fois aussi près que l'on veut de tout point P (x_1, y_1) intérieur au rectangle (A, B). Nous avons pu étendre cette démonstration aux mouvements non linéaires.

Les courbes de Lissajous correspondent à des valeurs positives des coefficients de x et de y (ω^2 et ω'^2). Dans les trois autres cas des équations linéaires découplées, l'une au moins des dimensions x et y tend vers l'infini. Ces autres trajectoires sont donc physiquement moins intéressantes sauf peut-être si l'un des mouvements étant harmonique, l'autre mouvement croît très lentement.

Passons maintenant aux cas nouveaux des mouvements non linéaires découplés, dont les équations générales s'écrivent :

$$\begin{cases} x'' + ax - \alpha . x^3 + \mu x^2 + a_o \\ y'' + by = \beta . y^3 + \nu y^2 + b_o \end{cases}$$

et qui se ramènent évidemment aux équations en snu ou pu. Nous classons les mouvements en deux genres. Tout d'abord ceux pour lesquels une au moins des dimensions tend vers l'infini. Nous considérons ces mouvements comme moins intéressants physiquement, sauf peut être le cas indiqué plus haut. Puis les mouvements bornés dont il importe de déterminer les conditions d'existence en (a, α, μ, a_o) et (b, β, ν, b_o). Il nous suffit pour cela de nous ramener aux fonctions snu, cnu, dnu (ou bien pu, p'u), ce qui peut s'effectuer sans difficultés par des transformations classiques. Il nous est alors possible d'après les variations de ces fonctions, de séparer les mouvements non bornés des mouvements bornés. Cette séparation peut également se faire directement par l'étude de l'intégrale première dans le plan de phase. Parmi les mouvements bornés nous pourrons distinguer les trajectoires algébriques (fermées) des trajectoires non algébriques (non fermées). Les trajectoires algébriques seront évidemment celles pour lesquelles x et y peuvent se ramener à des fonctions elliptiques de mêmes périodes et d'arguments multiples. Sinon la trajectoire ne sera ni algébrique ni fermée. Précisons sur le mouvement découplé suivant :

$$\begin{cases} x'' + \alpha x + \gamma x^3 = 0 \\ y'' + \beta y + \delta y^3 = 0 \end{cases}$$

dont la solution de principe s'écrit :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2M}. \sqrt{\dfrac{1+m_x}{\alpha}}. \ sn\left\{\sqrt{\dfrac{\alpha}{1+m_x}}. \ t \ ; \ m_x\right\} \\ y = \sqrt{2N}. \sqrt{\dfrac{1+m_y}{\beta}}. \ sn\left\{\sqrt{\dfrac{\beta}{1+m_y}}. \ t - t_o \ ; \ m_y\right\} \end{cases}$$

où 2M et 2N constantes des intégrales premières en x et y représentent donc les conditions initiales par les relations :

$$\begin{cases} u^2 + \alpha x^2 + \dfrac{\gamma}{2} x^4 = 2M \\ v^2 + \beta y^2 + \dfrac{\delta}{2} y^4 = 2N \end{cases}$$

tandis que les paramètres m_x et m_y sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} (1+m_x)^2 + m_x . \left\{\dfrac{\alpha^2}{\gamma M}\right\} = 0 \\ (1+m_y)^2 + m_y . \left\{\dfrac{\beta^2}{\delta N}\right\} = 0 \end{cases}$$

Les différents mouvements possibles ont déjà été étudiés au chapitre (VIII-3), par l'étude de l'intégrale première dans le plan de phase, dans la recherche des solutions périodiques des équations non linéaires à coefficients crénelés. Rappelons brièvement les quatre cas où les mouvements sont stables. Nous le ferons par exemple sur l'équation en x, en nous ramenant à un paramètre $0 < \mu < 1$.

Premièrement, le mouvement défini par ($\alpha > 0$; $\gamma > 0$) est toujours stable. La constante 2M est positive. Les paramètres possibles m' et m'' sont réels et négatifs, mais il y en a toujours un tel que : $1 + m > 0$. La solution s'écrit :

$$x = \sqrt{2M}. \sqrt{\frac{1+m}{\alpha(1-m)}}. \frac{sn}{dn}\left\{\sqrt{\frac{\alpha(1-m)}{1+m}}.t \ ; \left\{\frac{(-m)}{(1-m)}\right\}\right\}$$

Deuxièmement, le mouvement défini par ($\alpha > 0$; $\gamma < 0$) n'est stable qu'à la condition suivante : $0 < 2M < \dfrac{-\alpha^2}{2\gamma}$. Les paramètres possibles m' et m'' sont alors réels et positifs et il y en a toujours un tel que : $0 < m < 1$. La solution s'écrit :

$$x = \sqrt{2M}. \sqrt{\frac{1+m}{\alpha}}. \ sn\left\{\sqrt{\frac{\alpha}{1+m}}. \ t \ ; \ (m)\right\}$$

Troisièmement et quatrièmement, le mouvement défini par ($\alpha < 0$; $\gamma > 0$) est toujours stable. Mais il nous faut distinguer les mouvements ($2M > 0$) extérieurs à une certaine quartique à point double à l'origine, des mouvements ($2M < 0$) intérieurs aux deux ovales de cette courbe.

Pour les mouvements ($2M > 0$), les paramètres m' et m'' sont réels et négatifs, mais il y en a toujours un tel que : $1 + m > 0$. Le mouvement s'écrit :

$$x = \sqrt{2M}. \sqrt{\frac{1+m}{-\alpha(1-m)}}. \frac{sn}{dn}\left\{\sqrt{-\frac{\alpha(1-m)}{1+m}}\ t \ ; \left\{\frac{1}{(1-m)}\right\}\right\}$$

Pour les mouvements ($2M < 0$), les paramètres sont réels et positifs et il y en a toujours un tel que : $0 < m < 1$. La solution s'écrit en ce cas :

$$x = \sqrt{-2M}.\sqrt{\frac{1+m}{-\alpha m}}.\ \mathrm{dn}\left\{\sqrt{\frac{-\alpha}{1+m}}.\ t\ ;\ (1-m)\right\}$$

Tous les autres mouvements étant instables nous avons donc en principe 16 combinaisons possibles (x_i, y_j) de mouvements bidimensionnels bornés. Or les périodes fondamentales de $\mathrm{sn}\vartheta$ sont données par $\mathrm{sn}(\vartheta + 4K + 2iK') = \mathrm{sn}\vartheta$; celles de $\mathrm{dn}\,\vartheta$ sont données par $\mathrm{dn}(\vartheta + 2K + 4iK') = \mathrm{dn}\vartheta$. Pour $\frac{\mathrm{sn}}{\mathrm{dn}}(\vartheta)$ nous aurons donc $\frac{\mathrm{sn}}{\mathrm{dn}}(\vartheta + 4K + 4iK') = \frac{\mathrm{sn}}{\mathrm{dn}}(\vartheta)$. Mais nous remarquerons par contre que les carrés sn^2, dn^2, $\frac{\mathrm{sn}^2}{\mathrm{dn}^2}$ possèdent les mêmes périodes fondamentales (2K) + (2iK'). Par suite tant pour les 4 combinaisons i = j, que pour les 12 autres combinaisons $i \neq j$, les conditions :

$$\begin{cases} \mu_{xi} = \mu_{yj} \\ \rho_{ij} = \text{rapport des arguments} = \text{nombre commensurable} = \frac{k_1}{k_2} \end{cases} \qquad (k_1,\ k_2\ ;\ \text{entiers})$$

nous donnerons des courbes algébriques fermées.

Le tableau suivant traduit les conditions $\mu_{xi} = \mu_{yj}$ en fonction de quantités m_{xi}, m_{yj} :

x / y	$\alpha > 0$ $\gamma > 0$ $M > 0$	$\alpha > 0$ $\gamma < 0$ $0 < 2M < -\frac{\alpha^2}{2\alpha}$	$\alpha < 0$ $\gamma > 0$ $M > 0$	$\alpha < 0$ $\gamma > 0$ $M < 0$
$\beta > 0$ $\delta > 0$ $N > 0$	$m_x = m_y$	$m_x + m_y = m_x . m_y$	$m_x . m_y = 1$	$1 = m_x . (1 - m_y)$
$\beta > 0$ $\delta < 0$ $0 < N < -\frac{\beta^2}{2\delta}$	$m_x + m_y = m_x . m_y$	$m_x = m_y$	$1 = m_y . (1 - m_x)$	$1 = m_x + m_y$
$\beta < 0$ $\delta > 0$ $N > 0$	$m_x . m_y = 1$	$1 = m_x . (1 - m_y)$	$m_x = m_y$	$m_x + m_y = m_x . m_y$
$\beta < 0$ $\delta > 0$ $N < 0$	$1 = m_y . (1 - m_x)$	$1 = m_x + m_y$	$m_x + m_y = m_x . m_y$	$m_x = m_y$

Il nous faut de plus exprimer que le rapport ρ_{ij} est commensurable. Nous n'expliciterons pas cette condition ni celles du tableau. Seule la diagonale principale i = j nous donne immédiatement des conditions simples qui sont les suivantes : (k_1, k_2 entiers) :

$$\begin{cases} \alpha^2 . \delta . N = \beta^2 . \gamma . M \\ k_1 \sqrt{|\alpha|} = k_2 \sqrt{|\beta|} \end{cases}$$

Remarquons, avant de passer au cas des courbes non algébriques, que les relations du tableau peuvent se trouver directement, sans expliciter x et y, en considérant l'invariant modulaire absolu J de Félix Klein. En effet nous avons :

$$J = (g_2)^3 / \{(g_2)^3 - 27\,(g_3)^2\} = 1 + \frac{(2-m)^2 . (1-2m)^2 . (1+m)^2}{27\,m^2 . (1-m)^2}$$

Par suite si m est solution de cette équation, les quantités $\frac{1}{m}$; $1 - m$; $\frac{m-1}{m}$; $\frac{m}{m-1}$; $\frac{1}{1-m}$ le sont aussi. Nous avons ainsi 36 combinaisons qui nous redonnent les 6 relations déjà trouvées. (4).

Que se passe-t-il maintenant si pour $\mu_{xi} = \mu_{yj}$, le rapport ρ_{ij} se révèle incommensurable ? Que se passe-t-il également si d'une façon plus générale $\mu_{xi} \neq \mu_{yj}$? Nous allons montrer que le point M (x, y) de la trajectoire passe en général une infinité de fois aussi près que l'on veut de tout point P (x_1, y_1) intérieur au domaine borné permis au mouvement. Pour cela nous allons généraliser le cas linéaire des courbes de Lissajous.

Appelons X et Y les fonctions x et y et soient $u = u_1$, $v = v_1$ des arguments (éventuellement complexes) fixés de sorte que :

$$x_1 = X\{u_1 ; \mu_x\} \qquad y_1 = Y\{v_1 ; \mu_y\}$$

Prenons pour argument du "mouvement" en x :

$$u = Ut = u_1 + a.(\varpi_x) + b.(i\varpi'_x)$$

a et b étant des nombres entiers et (ϖ_x) et ($i\varpi'_x$) les périodes fondamentales de la fonction X (Ut ; μ_x). Nous avons donc $x = x_1$, quelques soient a et b. Considérons alors la différence :

$$y - y_1 = Y\{Vt - t_o ; \mu_y\} - Y\{v_1 ; \mu_y\}$$

et posons, avec ρ_1, ρ_2 commensurables ou non :

$$V/U = \rho = \rho_1 + i\rho_2$$

Nous avons alors :

$$y - y_1 = Y\{\rho.u_1 + \rho.[a.(\varpi_x) + b.(i\varpi'_x)] - t_o ; \mu_y\} - Y\{v_1 ; \mu_y\}$$

Et le point M (x, y) sera aussi voisin que l'on veut du point P (x_1, y_1) si la différence :

$$\rho . u_1 + \rho.[(a\varpi_x) + b.(i\varpi'_x)] - t_o - v_1$$

peut être rendue aussi voisine que l'on veut de :

$$c.(\varpi_y) + d.(i\varpi'_y)$$

où c et d sont des entiers et (ϖ_y) et ($i\varpi'_y$) les périodes fondamentales de la fonction $Y\{Vt ; \mu_y\}$. Posons alors, A et B étant réels quelconques :

$$-\rho . u_1 + t_o + v_1 = A.(\varpi_y) + B.(i\varpi'_y)$$

Nous obtenons pour la différence $D = D_1 + i D_2$

$$D_1 = \left\{\rho_1 . a. \frac{\varpi_x}{\varpi_y} - \rho_2 . b. \frac{\varpi'_x}{\varpi_y} - c - A\right\}.(\varpi_y)$$

$$D_2 = \left\{\rho_1 . b. \frac{\varpi'_x}{\varpi_y} + \rho_2 . a. \frac{\varpi_x}{\varpi'_y} - d - B\right\}.(\varpi'_y)$$

Or dans les différentes combinaisons possibles de mouvements bornés, nous avons pu nous ramener à des paramètres μ_x et μ_y compris entre 0 et 1 d'une part et d'autre part à des arguments U et V réels. Nous en concluons que le rapport ρ est réel, $\rho_2 = 0$, $\rho = \rho_1$. De plus u_1 et v_1 sont réels puisque t (donc t_o) est réel. Par suite B = 0 et $-\rho . u_1 + t_o + v_1 = A.(\varpi_y)$ et nous avons :

$$D_1 = \left\{\rho . a. \frac{\varpi_x}{\varpi_y} - c - A\right\}.(\varpi_y)$$

$$D_2 = \left\{\rho . b. \frac{\varpi'_x}{\varpi'_y} - d\right\}.(\varpi'_y)$$

La deuxième différence est nulle si ϖ'_y est nulle, ce qui ne nous intéresse pas, ou bien si la parenthèse est nulle, ce qu'il est toujours possible d'obtenir en prenant b = d = 0 ce qui manifestement n'entraîne aucun inconvénient, que la quantité $r' = \rho . \frac{\varpi'_x}{\varpi'_y}$ soit commensurable ou non.

Nous sommes alors ramenés au problème suivant, qui est celui des courbes de Lissajous linéaires :

Trouver deux nombres entiers a et c tels que la différence $D = D_1 = ar - c - A$ puisse être rendue aussi petite que l'on veut.

Ce problème admet effectivement une solution que nous emprunterons à Haag (5).

D'après la théorie des fractions continues nous pouvons trouver une fraction irréductible telle que (P et Q étant premiers entre eux) :

$$0 \leqslant \varepsilon = r - \frac{P}{Q} < \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{Q^2} < \frac{1}{Q^2}$$

Q étant aussi grand que nous le voulons. Prenons alors : $a = Q + R$, R étant entier. Nous avons :

$$ar = \left(\varepsilon + \frac{P}{Q}\right).(Q + R) = P + \frac{PR}{Q} + \varepsilon . (Q + R)$$

Les nombres P et Q étant premiers entre eux, nous savons que si nous donnons à R les valeurs $0, 1, \ldots\ldots (Q - 1)$, les restes de la division de PR par Q sont, dans un certain ordre, les nombres ci-dessus.

Appelons δ la différence entre A et sa partie entière E ; $A = E + \delta$ et $0 \leqslant \delta < 1$. Par suite la partie entière s de $\delta . Q$ est un des nombre $0, 1, \ldots\ldots (Q - 1)$. Donnons à R la valeur correspondante. Nous avons donc (F entier) :

$$\frac{PR}{Q} = \frac{s}{Q} + F$$

La différence D s'écrit alors, en prenant $c = P + F - E$:

$$D = \frac{s}{Q} - \delta + \varepsilon . (Q + R)$$

Or nous avons : $0 \leqslant \delta . Q - s = t < 1$. Par suite :

$$s - \delta . Q < \delta . Q - s < 1 \quad \text{et} \quad \frac{s}{Q} - \delta < \frac{1}{Q}$$

De plus :

$$\varepsilon < \frac{1}{Q^2} \qquad \text{et} \qquad Q + R \leqslant 2Q - 1$$

La différence s'écrit donc finalement :

$$D < \frac{1}{Q} + \frac{2Q - 1}{Q^2}$$

Q étant arbitrairement grand, D est arbitrairement petit.

Si r est commensurable la démonstration est encore valable : $\varepsilon = 0$ et $D < \frac{1}{Q}$. Si de plus A est commensurable, δ l'est aussi, $\delta = \frac{p}{q}$ et nous avons : $D = \frac{s}{Q} - \delta = \frac{1}{Q} \cdot (s - \frac{p}{q} \cdot Q) < \frac{1}{Q}$. La différence ne pourra s'annuler qu'exceptionnellement.

Cette démonstration étant rappelée, il nous faut examiner les différents cas possibles dans le problème non linéaire. En effet nous avons : $r = \rho . \frac{\varpi_x}{\varpi_y} = \rho . \pi$ et $(-\rho . u_1 + t_o + v_1) = A$. De plus D_2 peut toujours être annulée quel que soit $\pi' = \frac{\varpi'_x}{\varpi'_y}$. Donc :

a) Si ρ, π et π' sont commensurables le mouvement est algébrique et r est commensurable.

b) Si ρ ou π est incommensurable, le mouvement est non algébrique et r est incommensurable.

c) Si ρ et π sont incommensurables le mouvement est non algébrique : r généralement incommensurable, peut toutefois être exceptionnellement commensurable.

En conséquence nous aurons donc physiquement deux sortes de mouvements :

α) Les mouvements algébriques, périodiques et fermés. Ces mouvements ne peuvent évidemment couvrir d'une manière dense tout le domaine. Toutefois il est toujours possible par un choix judicieux de la "différence de phase" t_o, $(s = (A - E).Q)$, de faire passer ces courbes par un point quelconque $P\ (x_1,\ y_1)$ donné à l'avance.

β) Les mouvements non algébriques, non fermés. Ces mouvements couvrent d'une manière quasi-dense tout le domaine borné : il est toujours possible de les faire passer aussi près que nous le voulons d'un point quelconque $P\ (x_1,\ y_1)$ donné à l'avance.

Exceptionnellement nous pouvons avoir une deuxième sorte de mouvements non algébriques, ceux pour lesquels : $r = \rho . \pi = k_1/k_2$ et $s = (A - E).Q$. En ce cas (par un choix judicieux de t_o) ces courbes passent par tout point donné à l'avance mais ne couvrent pas pour cela d'une manière dense tout le domaine : t_o étant fixé la courbe passe par P, passe aussi près que l'on veut de tout autre point P' sans toutefois y passer forcément : le mouvement couvre d'une façon quasi-dense le domaine.

Nous bornerons là notre étude des mouvements de Lissajous généralisés, nous contentant de faire remarquer que ces questions sont en rapport avec le théorème $M^{\alpha \cdots o}$ de Stoeckel et les théories ergodiques. (6).

Après ce que nous venons de dire, il nous semble que l'étude des autres mouvements de Lissajous non linéaires, en particulier (pu ; pu) et (snu ; pu) ou bien des cas plus généraux, ne doivent pas présenter de difficultés.

IX-2-2 - Couplage orienté.

Si l'une des dimensions peut réagir sur l'autre sans que cette dernière puisse réagir sur la première, nous obtenons un couplage orienté du genre :

$$x'' = a_{30}.x^3 + a_{20}.x^2 + a_{10}.x + a_o$$

$$y'' = b_{30}.y^3 + (b_{31}.x + b_{20}).y^2 + (b_{32}.x^2 + b_{21}.x + b_{10}).y + b_{33}.x^3 + b_{22}.x^2 + b_{11}.x + b_o$$

Ce couplage correspond donc en fait à l'étude d'une équation non linéaire à coefficients elliptiques avec second membre elliptique.

Dans le cas où elle se réduit à une équation linéaire sans second membre, cette équation, pour être régulière, doit satisfaire aux conditions de Fuchs, ce qui n'est pas toujours le cas, du fait de l'existence du terme b_{32}. Si les conditions de Fuchs sont vérifiées, l'intégrale générale est méromorphe. L'équation entre alors dans la classe des équations de Picard (3), et l'on sait que son intégrale générale s'exprime par une combinaison linéaire de deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce c'est-à-dire de deux fonctions à multiplicateurs constants, soit dans la notation de Weierstrass, des fonctions du type : $y = A.\ \frac{\sigma(x + a)}{\sigma(x)}.\ \exp(bx).\ f(x)$, $f(x)$ étant une fonction elliptique. Dans les cas les plus simples nous avons des équations de Mathieu, de Lamé ou de Hermite. Nous nous bornons à rappeler que les équations de ce genre peuvent présenter des mouvements instables. La recherche des conditions de stabilité paramétrique n'est généralement pas simple.

Dans le cas général du couplage orienté, l'équation reste non linéaire et rentre dans une catégorie d'équations dont nous savons d'après les recherches de Painlevé et de Gambier, qu'elles ne possèdent pas d'intégrale générale méromorphe, sauf pour cinq types particuliers. Mais même dans ces cas, ces équations définissent, des transcendantes nouvelles. (3).

IX-2-3 - RECHERCHE DE CERTAINES SOLUTIONS GENERALES.

La recherche de la solution générale du couplage le plus général semble donc devoir introduire de nouvelles transcendantes. Tout au plus pouvons nous espérer que pour des systèmes couplés relativement simples, cette solution générale n'introduise que des transcendantes connues.

Mais cette recherche nécessite un fil directeur pouvant nous apporter quelques lueurs sur une question où une information, même partielle, serait la bienvenue. Nous nous sommes inspirés de notre étude des mouvements algébriques par les fonctions fuchsiennes ; plus exactement nous avons généralisés les équations de définition des fonctions thêta et zêta fuchsiennes de la façon suivante : (7).

Nous opérons sur la variable z d'une fonction f (z), une transformation T (z). La fonction se transforme alors en une autre fonction plus ou moins simple que nous avons toujours le droit d'écrire par analogie avec ce que nous avons déjà vu :

$$f[T(z)] = f[z] \cdot M(z) + P(z)$$

cette écriture ne présentant évidemment un certain intérêt que pour un multiplicateur M (z) et une période P (z), relativement simples.

Il est facile de nous rendre compte comment se transforment les dérivées premières et secondes de f [z], lorsque nous effectuons sur la variable z cette opération T(z). Nous obtenons successivement :

$$\frac{d}{dT}\{f[T(z)]\} = \frac{1}{T'} \cdot \{fM' + f'M + P'\}$$

$$\frac{d^2}{dT^2} \cdot f[T(z)] = \left(\frac{M}{T'^2}\right) \cdot f'' + \left(\frac{1}{T'^2}\right) \cdot \left(2M' - M \cdot \frac{T''}{T'}\right) \cdot f' + \left(\frac{1}{T'^2}\right) \cdot \left(M'' - M' \frac{T''}{T'}\right) \cdot f + \left(\frac{1}{T'^2}\right) \cdot P'' - \left(\frac{T''}{T'^3}\right) P'$$

Ces relations et la relation de définition nous permettent alors de trouver à quel système nouveau, un système couplé non linéaire quelconque donne naissance, lorsqu'on effectue sur la variable z une transformation U (z) pour x et V (z) pour y, c'est-à-dire lorsque nous posons :

$$x[U(z)] = x[z].\ M(z) + P(z)$$

$$y[V(z)] = y[z].\ N(z) + Q(z)$$

Comment obtenir des informations d'une telle transformation ? Nous nous bornerons dans ce qui suit à rechercher pour quelle transformations U, V et quels multiplicateurs M, N et périodes P, Q, le système reste invariant. Mais il nous faut bien voir que cette recherche ne peut nous mener, si toutefois elle y mène, aux formes de solution les plus générales. Car :

1/ le système n'a en ce cas aucune raison de rester invariant pour une transformation (U, V).

2/ un tel système invariant dans une transformation (U, V) n'a aucune raison d'admettre des solutions invariantes dans (U, V).

Pourtant cette opération va nous rendre de grands services. Effectuons cette transformation sur le système suivant :

$$\begin{cases} x'' + ax = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2 \\ y'' + by = \delta xy \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{U'^2}\right) \cdot x'' + \left(\frac{1}{U'^2}\right) \cdot \left(2M' - M \cdot \frac{U''}{U'}\right) x' + \left\{\left(\frac{1}{U'^2}\right) \cdot \left(M'' - M' \cdot \frac{U''}{U'}\right) + aM\right\} \cdot x + \left(\frac{P''}{U'^2}\right) - \left(\frac{U''}{U'^3}\right) \cdot P' + aP = \\ \qquad = \varepsilon_1 (Mx + P)^2 + \varepsilon_2 (Ny + Q)^2 \\ \left(\frac{N}{V'^2}\right) \cdot y'' + \left(\frac{1}{V'^2}\right) \cdot \left(2N' - N \cdot \frac{V''}{V'}\right) \cdot y' + \left\{\left(\frac{1}{V'^2}\right) \cdot \left(N'' - N' \cdot \frac{V''}{V'}\right) + bN\right\} \cdot y + \left(\frac{Q''}{V'^2}\right) - \left(\frac{V''}{V'^3}\right) \cdot Q' + bQ = \\ \qquad = \delta (Mx + P).\ (Ny + Q) \end{cases}$$

Pour un système invariant, nous trouvons immédiatement les conditions suffisantes :

$$\frac{M}{U'^2} = 1 = \frac{N}{V'^2} \qquad 2M' - M\frac{U''}{U'} = 0 = 2N' - N\frac{V''}{V'}$$

$$M^2 = 1 = N^2 = MN \qquad P = 0 = Q$$

$$\left(\frac{1}{U'^2}\right).\left(M'' - M'.\frac{U''}{U'}\right) + a.M = a$$

$$\left(\frac{1}{V'^2}\right).\left(N'' - N'.\frac{V''}{V'}\right) + b.N = b$$

Ces conditions nous mènent finalement à :

$$M = N = 1$$

$$U'^2 = V'^2 = 1$$

et par suite à :

$$\begin{cases} M = 1 \\ U = \pm z + \text{cste} \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 1 \\ V = \pm z + \text{cste} \end{cases}$$

A première vue nous n'obtenons rien d'autre que le résultat déjà obtenu dans le paragraphe (IX-1) : certaines solutions algébriques s'uniformisent par les fonctions elliptiques.

L'interprétation nous semble devoir être beaucoup plus nuancée (6). En effet dans le cas présent les constantes complexes d'intégration n'ont aucune raison d'être les mêmes. Mais alors une difficulté s'élève. Si les constantes d'intégration sont les mêmes, x et y restent invariants pour une même transformation elliptique $U = V = \pm z + \text{cste}$ et nous obtenons des courbes algébriques. Si ces constantes sont différentes, x et y n'ont plus les mêmes périodes fondamentales et nous avons vu que les mouvements de Lissajous généralisés répondaient à cette question. Mais le résultat que nous venons d'obtenir pour une transformation (U,V), ne nous oblige en rien à prendre $\delta = \varepsilon_2 = 0$. Il est donc valable, sinon pour le système général, au moins pour : $\delta \neq 0 \neq \varepsilon_2$. Mais ce fait semble en contradiction avec ce que nous savons des fonctions elliptiques. Comment obtenir une relation algébrique par exemple : $x'' + ax = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2$, entre deux fonctions qui manifestement ne sont liées par aucune relation algébrique puisque leurs périodes sont supposées incommensurables ?

Il nous faut pour cela reconsidérer l'interprétation du résultat obtenu. Nous avons déduit de nos relations :

$$U = \pm z + k_x \qquad V = \pm z + k_y$$

En réalité notre interprétation n'est pas exacte. Le résultat brutal obtenu plus haut est le suivant : $(U')^2 = +1 = (V')^2$. Ce qui veut dire qu'à l'intérieur même de l'expression de x (ou y), rien ne nous oblige à prendre partout la même constante d'intégration. Pour une certaine partie de x, nous dériverons (par exemple) par rapport à : $\pm z + k_{x1}$ pour une autre par rapport à : $\pm z + k_{xi}$ etc. Autrement dit à l'intérieur même de l'expression de x, rien ne nous interdit d'avoir une fonction elliptique de période K_{x1}, une autre de période K_{x2} etc.. K_{xi}. Et de même pour y, K_{y1},..K_{yj}. Bien plus, rien ne nous dit que x ou y doivent s'écrire, directement, au moyen de fonctions elliptiques. Les conditions que nous avons trouvées nous disent simplement qu'il est possible que x puisse s'exprimer, (directement ou par des moyens beaucoup plus indirects) par des fonctions elliptiques de périodes différentes (éventuellement commensurables, d'où éventuellement les courbes algébriques). De même pour y.

Le résultat de cette analyse est assez satisfaisant, car nous concevons mieux maintenant qu'il y ait manifestement et nécessairement, quelque chose de commun entre x et y, ce lien s'évanouissant éventuellement d'une certaine manière par l'introduction du couplage et n'ayant en tous cas rien à voir avec la commensurabilité des périodes.

Reprenons par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} x'' + ax = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2 \\ y'' + by = \delta . xy \end{cases}$$

Comment déterminer ce lien nécessaire entre x et y ? L'idée la plus simple est de supposer que x et y sont des combinaisons linéaires de deux fonctions f et g, à priori quelconques (mais s'ex-

primant comme nous le verrons, au moyen de fonctions elliptiques de périodes différentes) et d'essayer d'éliminer les couplages indésirables intervenant par les produits x^2, y^2, xy, par un choix judicieux des constantes.

Posons donc :

$$\begin{cases} x = Af + Bg \\ y = Cf + Dg \end{cases}$$

Nous trouvons :

$$\begin{cases} Af'' + aAf + Bg'' + aBg = (\varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 C^2) f^2 + (\varepsilon_1 B^2 + \varepsilon_2 D^2) g^2 + (\varepsilon_1 2AB + 2\varepsilon_2 CD) fg \\ Cf'' + bCf + Dg'' + bDg = \delta ACf^2 + \delta BD g^2 + \delta (AD + BC) fg \end{cases}$$

Nous obtenons alors un véritable découplage du système si nous imposons les conditions :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 . AB + \varepsilon_2 . CD = 0 \\ AD + BC = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne deux constantes indépendantes A, B les deux autres s'écrivant :

$$\begin{cases} C\sqrt{\varepsilon_2} = \pm A\sqrt{\varepsilon_1} \\ D\sqrt{\varepsilon_2} = \pm B\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases}$$

Malheureusement les coefficients a, b, ε_1, ε_2, δ ne peuvent encore une fois être quelconques car nous avons :

$$\begin{cases} A.\ (f'' + af) = (\varepsilon_1 . A^2 + \varepsilon_2 . C^2).\ f^2 = 2\varepsilon_1 . A^2 . f^2 \\ C.\ (f'' + bf) = \delta . ACf^2 \\ B.\ (g'' + ag) = (\varepsilon_1 . B^2 + \varepsilon_2 . D^2).\ g^2 = 2\varepsilon_1 . B^2 . g^2 \\ D.\ (g'' + bg) = \delta . BD . g^2 \end{cases}$$

ce qui nous impose $a = b$; $\delta = 2\varepsilon_1$. Toutefois les solutions obtenues sont cette fois-ci les solutions générale du système :

$$\begin{cases} x'' + ax = \varepsilon_1 . x^2 + \varepsilon_2 . y^2 \\ y'' + ay = 2.\varepsilon_1 . xy \end{cases}$$

Elles s'écrivent en effet (7) :

$$\begin{cases} x = Af + Bg \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} . (Af - Bg) \end{cases}$$

A et B étant deux constantes indépendantes et f, g deux fonctions elliptiques définies par :

$$\begin{cases} f'' + af = 2.\varepsilon_1 . A.f^2 \\ g'' + ag = 2.\varepsilon_1 . B.g^2 \end{cases}$$

c'est-à-dire par :

$$\begin{cases} f = p\left\{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1 A}{3}} . t + t_{fo} \ ;\ g_2 = \dfrac{3a^2}{4\varepsilon_1^2 A^2} ;\ g_3 = \dfrac{3M}{\varepsilon_1 A}\right\} + \dfrac{a}{4\varepsilon_1 A} \\ g = p\left\{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1 B}{3}} . t + t_{go} \ ;\ g_2 = \dfrac{3a^2}{4\varepsilon_1^2 B^2} \ ;\ g_3 = \dfrac{3N}{\varepsilon_1 B}\right\} + \dfrac{a}{4\varepsilon_1 B} \end{cases}$$

p { } étant la fonction de Weierstrass et t_{f_o}, t_{g_o}, étant deux autres constantes indépendantes. Quant à M et N ce sont les constantes des intégrales premières suivantes :

$$\begin{cases} (f')^2 = \frac{4}{3}\varepsilon_1 A \left(f - \frac{a}{4\varepsilon_1 A}\right)^3 - \frac{a^2}{4\varepsilon_1 A}\left(f - \frac{a}{4\varepsilon_1 A}\right) - M \\ (g')^2 = \frac{4}{3}\varepsilon_1 B \left(g - \frac{a}{4\varepsilon_1 B}\right)^3 - \frac{a^2}{4\varepsilon_1 B}\left(g - \frac{a}{4\varepsilon_1 B}\right) - N \end{cases}$$

M s'exprime donc en fonction de f_o, f'_o, A et N en fonction de g , g' , B c'est-à-dire x_o, x'_o, y_o, y'_o, A d'une part et x_o, x'_o, y_o, y'_o, B d'autre part, car nous avons :

$$\begin{cases} 2 A f_o = x_o + y_o \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \\ 2 B g_o = x_o - y_o \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 A f'_o = x'_o + y'_o \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \\ 2 B g'_o = x'_o - y'_o \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \end{cases}$$

En résumé nous avons quatre constantes indépendantes A, t_{f_o}, B, t_{g_o}, qui seront déterminées en fonction des conditions initiales par les quatre équations ci-dessus.

Remarquons que pour : $a = 0 = b$; $\varepsilon_1 = 6 = \varepsilon_2$; $A = \frac{1}{2} = B$; $t_{f_o} = -t_o + \tau$; $t_{g_o} = -t_o - \tau$; nous retrouvons bien les solutions (IX-1-1-f) du système :

$$\begin{cases} x'' = 6x^2 + 6y^2 \\ y'' = 12 x y \end{cases}$$

ce qui est satisfaisant.

On pourrait penser que le mouvement $f(x, y) = 0$ est algébrique du fait de l'intégrale première du § IX-1-3. On peut vérifier qu'il n'en est rien.

Nous avons donc, par un véritable découplage, réussit à obtenir une solution générale, dans un cas encore restreint, il est vrai. Ce résultat nous incite à penser qu'il existe d'autres systèmes pouvant être intégrés de cette manière. Une recherche systématique ne semble pas devoir soulever de difficultés, en principe tout au moins. Nous nous proposons de revenir un peu plus tard dans une autre recherche sur diverses méthodes de découplage et leurs applications.

Il faut toutefois remarquer que les relations qui viennent d'être obtenues entre les coefficients ne correspondent pas à celles du système obtenu pour un synchrotron dans l'hypothèse d'un champ magnétique linéaire. Le choix d'un champ magnétique différent permettrait peut-être de s'y ramener jusqu'à un certain point.

En résumé nous avons trouvé un certain nombre de méthodes menant dans certains cas à des solutions effectives exactes tant pour les solutions algébriques que non algébriques. Nous limiterons là notre étude, mais pour conclure notre travail, nous allons très brièvement donner quelques indications sur les systèmes à coefficients périodiques.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IX

(1) VALAT J. - CRAS - 251, 1960, p. 198.

(2) POINCARE - Oeuvres.

(3) VALIRON - Tomes I et II.

(4) VALAT J. - CRAS - 251, 1960, p. 630.

(5) HAAG - Les mouvements vibratoires - Tome I p. 53.

(6) MERCIER - Principe de Dynamique Analytique (Gauthier-Villars).

(7) VALAT J. - CRAS - 251, 1960, p. 840.

CHAPITRE X

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE, COUPLÉES NON LINÉAIREMENT, A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

Un des cas les plus importants des systèmes à coefficients variables nous semble devoir être au point de vue physique les systèmes à coefficients périodiques, tant sinusoïdaux que crénelés ou impulsionnels.

Dans le cas des systèmes à coefficients crénelés, si nous connaissons les coordonnées paramétriques des systèmes adjoints à coefficients constants, nous pouvons par une généralisation de la méthode que nous avons indiquée en VIII pour une seule équation non linéaire, rechercher des solutions périodiques du système crénelé. Mais de plus les conditions liant les coefficients des systèmes à coefficients constants devront être vérifiées (la solution générale étant supposée non connue). Une recherche effective nécessitera donc beaucoup de tâtonnements.

C'est pourquoi il importe de se rendre compte que la recherche de ces mouvements périodiques n'est pas vaine à priori.

Montrons-le sur le système suivant à coefficients périodiques quelconques (de période T) :

$$\begin{cases} x'' + \overset{\frown\frown}{\alpha}.x = \overset{\frown\frown}{\gamma}.x^3 + \overset{\frown\frown}{\mu}.x.y^2 \\ y'' + \overset{\frown\frown}{\beta}.y = \overset{\frown\frown}{\delta}.y^3 + \overset{\frown\frown}{\nu}.y.x^2 \end{cases}$$

Cherchons des multiplicateurs M (t) et N (t) tels que :

$$\begin{cases} x\,(t + T) = M\,(t).\ x\,(t) \\ y\,(t + T) = N\,(t).\ y\,(t) \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} M''x + 2\,M'x' + Mx'' + \overset{\frown\frown}{\alpha}Mx = \overset{\frown\frown}{\gamma}.M^3.x^3 + \overset{\frown\frown}{\mu}.MN^2.\ xy^2 \\ N''y + 2\,N'y' + Ny'' + \overset{\frown\frown}{\beta}Ny = \overset{\frown\frown}{\delta}.N^3.\ y^3 + \overset{\frown\frown}{\nu}.NM^2.\ yx^2 \end{cases}$$

En combinant ce système avec le système primitif nous trouvons :

$$\begin{cases} M''x + 2\,M'x' = \overset{\frown\frown}{\gamma}.M.x^3.\ (M^2 - 1) + \overset{\frown\frown}{\mu}.M.x.y^2.\ (N^2 - 1) \\ N''y + 2\,N'y' = \overset{\frown\frown}{\delta}.N.y^3.\ (N^2 - 1) + \overset{\frown\frown}{\nu}.N.y.x^2.\ (M^2 - 1) \end{cases}$$

Si M = cste et N = cste le système est vérifié pour :

$$\begin{cases} M^2 - 1 = 0 \\ N^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent le système peut être vérifié par des solutions périodiques de période T, ainsi que par diverses sortes de solutions périodiques de période 2T. La recherche de solutions périodiques est donc justifiée.

D'autre part les méthodes que nous avons employées pour les systèmes à coefficients constants nous semblent pouvoir être étendues assez facilement aux systèmes à coefficients périodiques et devoir donner des indications intéressantes. Nous nous proposons d'y revenir dans une recherche ultérieure.

Dans le cas où les coefficients périodiques ne sont pas trop profondément modulés par rapport à leur valeur moyenne, il est d'ailleurs possible d'obtenir quelques indications sur le comportement du système en se ramenant par les transformations de Sigurgeirson (1) ou de Schoch (2) à des systèmes à coefficients constants. Cette possibilité augmente encore l'importance des systèmes à coefficients constants et justifierait leur étude, s'il en était besoin.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE X

(1) SIGURGEIRSON - CERN, T/TS, 1 et 3, 1952 et 1953.

(2) SCHOCH - CERN, 57 - 23, 1958.

CONSIDÉRATIONS FINALES

Dans le premier chapitre de ce travail, nous avons décrit un simulateur d'une équation linéaire de Hill-Meissner à coefficient créneau. Les difficultés de mise au point ont été nombreuses.

Dans le deuxième chapitre, nous avons comparés les résultats expérimentaux obtenus, avec le diagramme de stabilité théorique de Meissner-Strutt-Van der Pol, que nous avons d'ailleurs été obligés de recalculer à grande échelle. Nous avons constaté certains désaccords et nous avons pensé qu'il fallait faire intervenir l'amortissement interne.

Dans le troisième chapitre nous avons calculé un réseau de diagramme universels plus généraux faisant intervenir l'amortissement et tracés en gardant le produit ($\alpha.T$) invariant. Ces diagrammes ont nécessité des calculs importants. Toutefois le simulateur travaillant naturellement à amortissement α = cste, nous avons calculé d'autres diagrammes, particuliers cette fois-ci au simulateur. Malgré une concordance meilleur de l'expérience et des résultats théoriques, nous avons constaté un désaccord résiduel.

Dans un quatrième chapitre nous avons fait intervenir les dissymétries internes du simulateur. Mais ces défauts, qui expliquent certaines difficultés expérimentales, ne peuvent être l'origine du désaccord résiduel constaté.

Dans un cinquième chapitre, nous avons finalement incriminé la dissymétrie des créneaux fournis par le générateur. Pour ce faire nous avons construit de nouveaux diagrammes universels à $\alpha.T$ = cste, en fonction également de la dissymétrie algébrique $d = \frac{T_1 - T_2}{T}$ ($-1 \leqslant d \leqslant 1$), T étant la période totale, T_1 et T_2 étant l'une et l'autre des "demi-périodes". Ces diagrammes ($d = -0,4$; $-0,1$; $+0,1$; $+0,4$) ont nécessité des calculs encore plus considérables que précédemment ($d = 0$). Pour les vérifier nous avons utilisé une machine analogique différentielle universelle, alliée à des multiplieurs de haute précision du Laboratoire de Calcul Analogique du C.E.N. de Saclay.

Dans un sixième chapitre, nous sommes revenus au simulateur. Nous avons construit un périodemètre permettant de mesurer avec finesse la période et les deux demi-périodes du créneau. Les derniers désaccords ont pu alors être expliqués et les courbes théoriques vérifiées avec une bonne précision expérimentale par le simulateur.

Dans un septième chapitre nous avons montré que le simulateur fonctionnait comme un système bouclé asservi. En étudiant son comportement, nous avons pu donner une présentation originale du théorème de Floquet.

Dans un huitième chapitre, nous avons étudié le comportement de l'équation linéaire de Hill-Meissner dans le plan de phase (y ; $u = y'$). Nous avons mis en évidence la facilité avec laquelle on pouvait, grâce à lui, écrire les conditions de périodicité d'un mouvement régi par une telle équation. Nous avons réussi à étendre cette méthode aux équations non linéaires à coefficients crénelés. Les solutions périodiques dépendent maintenant des diverses conditions initiales. Cette méthode est valable quelle que soit l'importance de l'amplitude des non-linéarités. Nous l'avons appliquée à l'équation :

$$y'' + \tilde{a}.\ y + \tilde{\varepsilon}.\ y^3 = 0$$

Grâce aux machines de Saclay, nous avons effectué des vérifications expérimentales dans le plan de phase, tant pour l'équation linéaire du début que pour l'équation non linéaire que nous venons d'indiquer. Les résultats expérimentaux ont très bien vérifié les prévisions théoriques.

Dans un neuvième chapitre, pour préparer la généralisation de ces résultats aux systèmes d'équations non linéaires couplées par coefficients crénelés, nous avons étudié les systèmes adjoints à coefficients constants.

Nous avons tout d'abord étudié des cas où le système se ramenait à une seule équation (complexe) et dans ces cas particuliers, nous avons donné des solutions paramétriques effectives. Les fonctions elliptiques de même période étant liées par une relation algébrique, nous avons ensuite recherché les fonctions elliptiques x et y, les plus générales répondant à un système donné. Nous avons montré que cette méthode menait à une véritable algébrisation du système mais que ces solutions n'existaient que pour des coefficients liés par certaines relations et pour certaines conditions initiales. Nous avons donné un exemple et mené la discussion jusqu'à obtention d'une solution effective. Puis nous avons recherché si nous pouvions nous imposer à priori une courbe algébrique $f(x, y) = 0$, si possible fermée, évitant certaines régions etc. Nous avons montré que cette recherche était possible dans le cas où nous connaissions une intégrale première du mouvement. Nous avons donné les conditions d'existence de cette intégrale première et nous avons montré encore une fois que les mouvements algébriques n'existaient que pour certaines valeurs des coefficients et des conditions initiales. Pour trancher la question, nous avons finalement considéré les fonctions les plus générales uniformisant une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ d'un système. Pour cela nous avons recherché les fonctions fuchsiennes x, y, solutions du système. Nous avons trouvé une intégrale première (autre que la précédente) et cette intégrale première existe toujours. Nous avons indiqué comment trouver à priori une courbe algébrique et nous avons montré que ces solutions fuchsiennes ne pouvaient effectivement exister que pour des coefficients liés par certaines relations, les conditions initiales étant évidemment liées par l'intégrale première.

Ayant éclairci le problème de l'existence de solutions algébriques et donné diverses méthodes de recherche effective, nous nous sommes tournés vers la question plus délicate des mouvements non algébriques. Nous avons tout d'abord étudié les mouvements découplés, c'est-à-dire, les mouvements de Lissajous non linéaires en recherchant particulièrement les mouvements physiquement intéressants c'est-à-dire les mouvements bornés. Nous avons explicité les conditions d'existence des divers mouvements algébriques bornés et montré que les mouvements non-algébriques bornés recouvraient d'une manière quasi-dense le domaine borné.

Puis pour les systèmes quelconques non découplés nous avons recherché la forme possible de certaines solutions générales. Les recherches précédentes nous ont amener à généraliser les équations de définition des fonctions thêta - et zêtafuchsiennes. Cette analyse fonctionnelle nous a amené à imaginer une méthode de découplage qui nous a permis dans un cas déjà intéressant de trouver et d'expliciter la solution générale du système considéré.

Sur ce résultat nous avons pratiquement arrêté notre travail. Dans un dixième et très bref chapitre nous avons montré que les systèmes non linéaires à coefficients périodiques admettaient effectivement diverses solutions périodiques et que par suite pour les coefficients périodiques crénelés l'extension de la méthode du chapitre VIII était parfaitement justifiée. L'existence de transformations approchées permettant pour des coefficients périodiques pas trop modulés de se ramener à des systèmes à coefficients constants, augmente encore l'importance de ces systèmes et justifierait à elle seule leur étude, s'il en était besoin.

En vu de ces résultats, il semble désormais possible d'obtenir des renseignements théoriques sur des systèmes un peu plus compliqués comme le système non linéaire suivant qui représente d'une manière encore plus précise les oscillations bétatroniques des synchrotrons ($r_o \gg 1$) :

$$\begin{cases} x''.\left(1 - \frac{1}{r_o}\right) - x'^2.\left(\frac{1}{2r_o}\right) + y'^2.\left(\frac{1}{2r_o}\right) + x.(1 - n) = x^2.(3).\left(\frac{1 + n}{r_o}\right) - y^2.\left(\frac{n}{2r_o}\right) \\ y'' - xy''.\left(\frac{1}{r_o}\right) - x'.y'.\left(\frac{1}{r_o}\right) + y.(n) = -x.y.\left(\frac{n}{r_o}\right) \end{cases}$$

au moins en ce qui concerne les mouvements algébriques et les mouvements périodiques. Des solutions plus générales ne correspondant pas aux valeurs des coefficients pourraient être éventuellement exploités, suivant une remarque déjà faite.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

REMERCIEMENTS 4

INTRODUCTION 5

CHAPITRE I - LE SIMULATEUR 7

Principe et Description 7
Etude et Mise au point 11

CHAPITRE II - DIAGRAMME DE STABILITE DE L'EQUATION SANS AMORTISSEMENT ET A CRENEAUX SYMETRIQUES 37

Calcul à grande échelle du diagramme de stabilité 37
Vérifications expérimentales par le simulateur 39

CHAPITRE III - DIAGRAMME DE STABILITE DE L'EQUATION AVEC AMORTISSEMENT ET A CRENEAUX SYMETRIQUES 45

Etablissement des conditions de Stabilité 45
Calcul d'un Diagramme Universel $\alpha . T = Cste$ 48
Calcul d'un Diagramme particulier $\alpha = Cste$ 51
Etude générale du Montage avec Amortissement quelconque 51
Vérifications expérimentales du Diagramme à $\alpha = Cste$ 55

CHAPITRE IV - STABILITE DU SIMULATEUR SOUMIS A UNE PERTURBATION CRENELEE DUE AUX DISSYMETRIES 58

Origine des Dissymétries 58
Stabilité de l'équation avec amortissement, à créneaux symétriques et à second membre périodique et crénelée 58
Vérifications expérimentales 60

CHAPITRE V - DIAGRAMME DE STABILITE DE L'EQUATION AVEC AMORTISSEMENT POUR DES CRENEAUX DISSYMETRIQUES DE DISSYMETRIE ALGEBRIQUE d 66

Etablissement des conditions de Stabilité 66
Calcul des diagrammes universels $\alpha . T = Cste$ pour différentes valeurs de la dissymétrie algébrique 67
Vérifications expérimentales 67

CHAPITRE VI - VERIFICATION FINALE ET CONCLUSION 76

CHAPITRE VII - LES SYSTEMES ASSERVIS A COEFFICIENTS PERIODIQUES ET LE THEOREME DE FLOQUET 79

Le Simulateur considéré comme système asservi 79
Formes des solutions 82

Pages

CHAPITRE VIII - LE PLAN DE PHASE ET LES SOLUTIONS PERIODIQUES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES, DONT LES COEFFICIENTS VARIENT SUIVANT UNE FONCTION CRENELEE..... 85

Méthode de recherche des solutions périodiques..... 85
Solutions périodiques de l'équation bétatronique linéaire, à coefficients crénelés..... 87
Vérifications Expérimentales..... 90
Solutions périodiques d'une équation bétatronique non linéaire à coefficients crénelés. . 96
Vérifications Expérimentales..... 105

CHAPITRE IX - SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIEME ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS, COUPLEES NON LINEAIREMENT..... 109

Recherche des Mouvements algébriques..... 109

Système se ramenant à une équation..... 109
Intégration par les fonctions elliptiques..... 111
Recherche à priori d'une courbe algébrique, connaissant une intégrale première..... 114
Recherche des fonctions fuchsiennes uniformisant les courbes (f (x, y) = 0 algébriques du système..... 117

Recherche de Mouvements Non Algébriques..... 120

Mouvements de Lissajous Non Linéaires 120
Couplage orienté..... 125
Recherche de certaines Solutions générales par Analyse Fonctionnelle et par la Méthode du Découplage 125

CHAPITRE X - SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE, A COEFFICIENTS PERIODIQUES, COUPLEES NON LINEAIREMENT..... 130

Existence de Mouvements Périodiques..... 130

CONSIDERATIONS FINALES..... 132

IMP. LOUIS-JEAN – GAP
Dépôt légal n° 103 – 1964

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"STABILITE DES REACTEURS NON LINEAIRES PAR LA METHODE DE BLAQUIERE ET LA SECONDE METHODE DE LIAPOUNOFF"

Vu et approuvé :
Paris, le 10 décembre 1960
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. PERES

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean SARRAILH